Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Baudynamik

BM 31

DIADEM-HETHITER-VERLAG.DE

2.1.1.3 Eigenschwingungen

Begriff <u>Eigenkreisfrequenz ω</u>

Aus dem vorherigen Abschnitt: $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ (1)

Für $T = 2\pi$ Sekunden ist aus (1) $\omega = 1$.

$\boxed{\omega \text{ ist die Anzahl der Vollschwingungen in } 2\pi \text{ Sekunden.}}$

Zum Beispiel für $T = 4\pi$ Sekunden ist aus (1) $\omega = 0{,}5$
d.h. wenn eine ganze Schwingung 4π Sekunden dauert,
dann wird in 2π Sekunden nur die halbe Schwingung,
also $0{,}5\ \omega$, geschafft.

Begriff <u>Eigenfrequenz f_0</u>

$\boxed{f_0 = \frac{\omega}{2\pi}}$ (2)

f_0 = Eigenfrequenz in Hz (Hertz)
= Anzahl Vollschwingungen / Zeit<u>einheit</u>

(Je Zeiteinheit !!! Im Unterschied zu
2π Sekunden bei der Eigenkreisfrquenz ω)

Begriff Eigenschwingdauer T

Aus (1):

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_0}}$$

Eigenschwingdauer in Sekunden ,
Dauer einer Vollschwingung

Aus Abschnitt 2.1.1.2:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}} \qquad f_0 = \omega / 2\pi$$

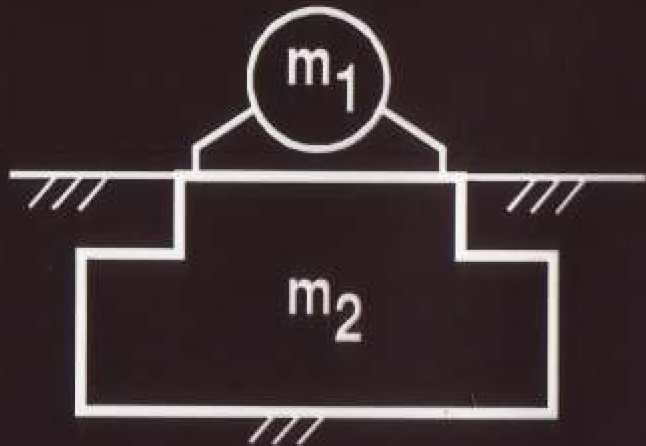
- Die Eigenfrequenz f_0 ist nur abhängig von der Masse *m* und der Federkonstanten *c* des schwingenden Körpers.
- Eine Vergrößerung der Masse m veringert die Eigenfrequenz f_0 .

Aus Abschnitt 2.1.1.2:

$$\boxed{u = u_{max} \sin(\omega t)}$$

- Die Amplitude (größte Auslenkung) hängt von der Anfangsauslenkung u_{max} ab.

2.1.1.4 Eigenfrequenzen von Maschinenfundamenten



Rechenmodell

$$m = m_1 + m_2$$

Federkonstante c
aus Bodenkennwerten,
in kN / m

Eigenkreisfrquenz

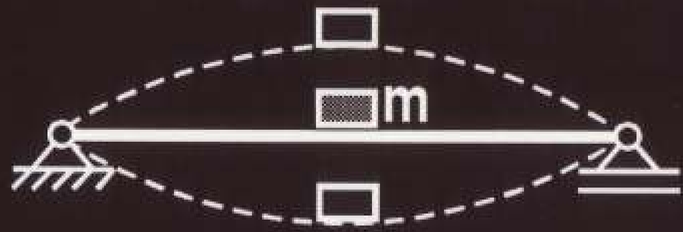
$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{in } 1/s \quad \text{oder} \quad rad/s$$

Eigenfrquenz

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

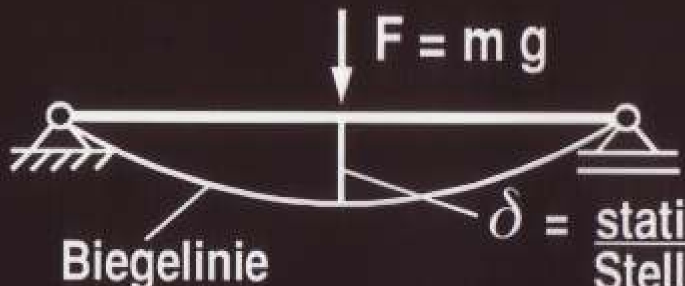
in Vollschwingungen / s
oder in Hz (Hertz)

2.1.1.5 Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen von Stabtragwerken



m (Masse der Maschine)

Der Träger wird durch eine Feder ersetzt. Die Masse des Trägers wird oft vernachlässigt.



Die Federkonstante c in kN / m wird aus der <u>statischen</u> Durchbiegung des Trägers berechnet.

δ = <u>statische</u> Verschiebung (Durchbiegung) an der Stelle von $F = m\,g$ und in Richtung von $F = mg$.

<u>Berechnung von δ , Eigenkreisfrquenz, Eigenfrequenz</u>

δ in m = Durchbiegung des Trägers pro <u>statisch</u> aufgebrachte Einzellast der Größe $F = m\,g$ in kN .

$c = m\,g / \delta$ in kN / m

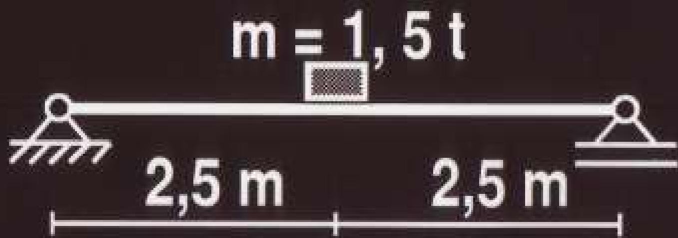
$\boxed{1\ \text{kN} = 1\ \text{t m / s}^2}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ in 1 / s oder rad / s (6,28 rad / s = 360° / s = 1 Vollschwingung / s)

$f_0 = \dfrac{\omega}{2\pi}$ in Vollschwingungen / s = Hz (Hertz)

Beispiel

ges: Eigenfrequenz des Systems Träger / Maschine



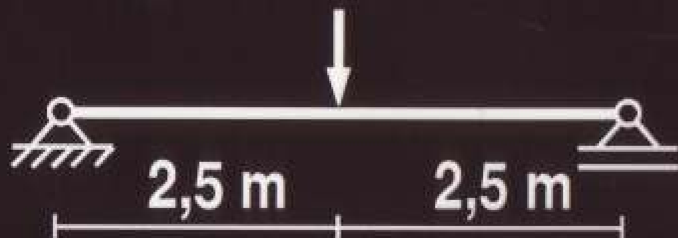
Kennwerte des Trägers

$E_{Stahl} = 21 \cdot 10^{7}\ \mathrm{kN/m^2}$

Trägheitsmoment I - Profil

$J = 4250 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^4}$

$F = mg = 1{,}5 \cdot 10\ \mathrm{t\,m/s^2} = 15\ \mathrm{kN}$



Aus einemTabellenbuch findet man

$$\delta = \frac{\ell^3 F}{48\,E\,J} = \frac{5^3 \cdot 15}{48 \cdot 21 \cdot 10^7 \cdot 4250 \cdot 10^{-8}} \quad m^3 \cdot kN \cdot \frac{m^2}{kN}\,\frac{1}{m^4}$$

$$\delta = \underline{\underline{15 \cdot 0{,}00029}}\ \mathbf{m}$$

$$c = \frac{F}{\delta} = \frac{15}{15 \cdot 0{,}00029}\,\frac{kN}{m} = 3448\,\frac{kN}{m} = 3448\,\frac{t\,m}{s^2\,m} = \underline{\underline{\mathbf{3448}}}\,\frac{t}{s^2}$$

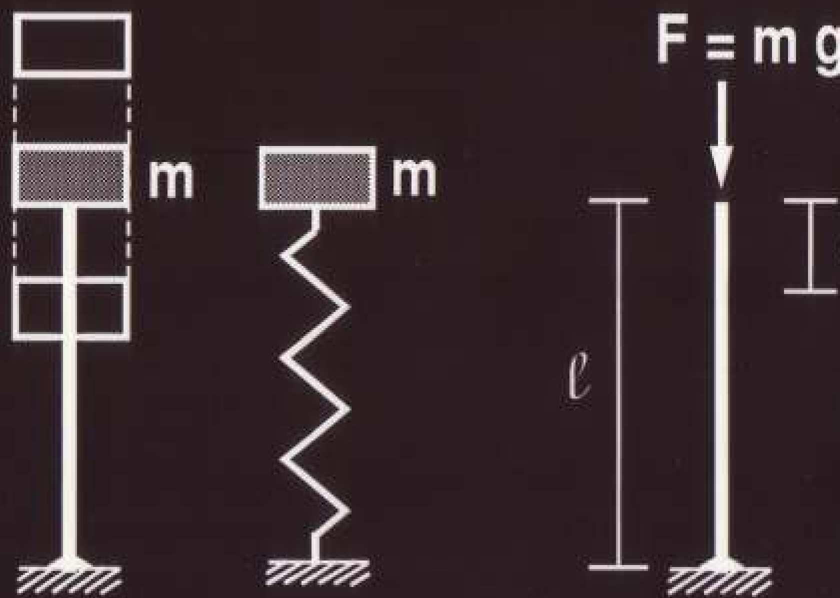
$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{3448}{1{,}5}}\;\frac{1}{s} = \underline{\underline{\mathbf{48}}}\,\frac{1}{s}$$

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{48}{2\pi} = 7{,}64\ Hz = 7{,}64 \cdot 60 = \underline{\underline{\mathbf{459}}}\,\frac{\text{Vollschwingungen}}{\text{min}}$$

Diese 459 Vollschwingungen / min sollten 20 - 30 % größer sein als die Umdrehungszahl / min der Maschine (hohe Abstimmung) <u>oder</u> 20 - 30 % kleiner (tiefe Abstimmung).

Die Umdrehungszahl der Maschine liefert ihr Hersteller mit.

2.1.1.6 Eigenfrequenzen der Dehnschwingungen

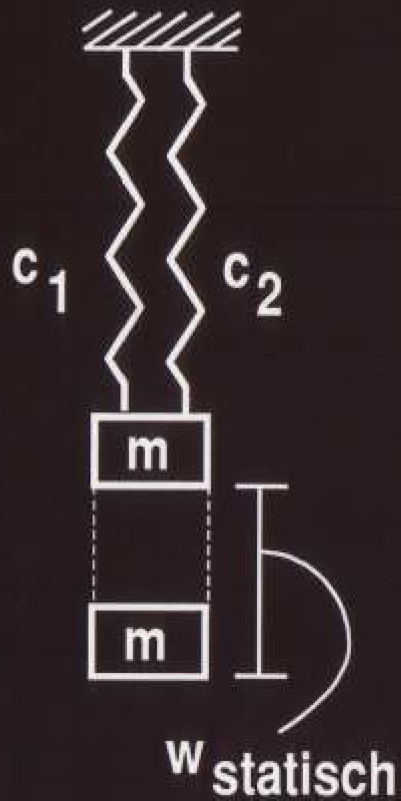


$$\delta = \frac{F\,\ell}{E\,A}$$

$$c = F / \delta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

2.1.1.7 Parallelschaltung von Federn



Federwege : $w_1 = w_2 = w$

Federkräfte : $F_1 = c_1 w_1 = c_1 w$

$F_2 = c_2 w_2 = c_2 w$

Gleichgewicht im Ruhezustand
(statische Ruhelage)

$F_1 + F_2 = G$ (G aus Masse m)

$$\underbrace{c_1 w + c_2 w}_{c_R w} = m\,g$$

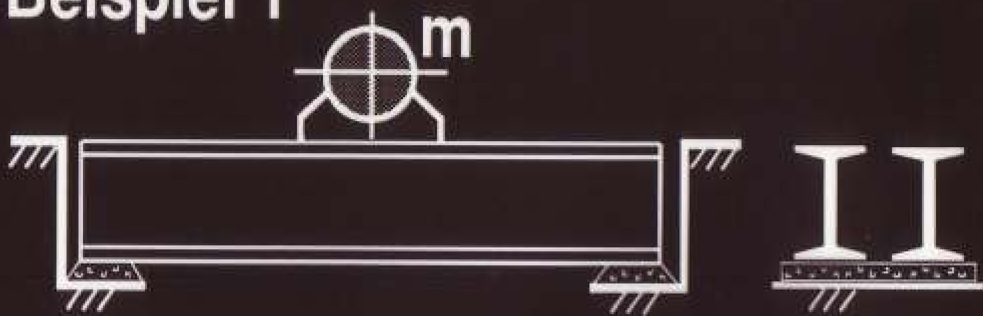
$$c_R w = m\,g$$

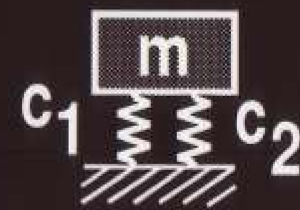
c_R = resultierende Federkonstante

$c_R = c_1 + c_2$

Für n Federn : $c_R = \sum_{i=1}^{n} c_i$

Beispiel 1

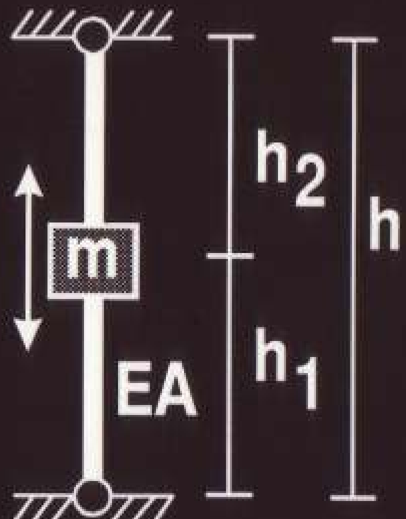


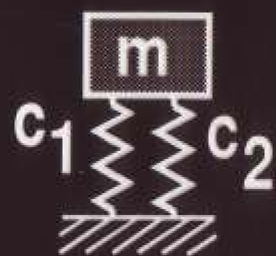


$$c_R = c_1 + c_2$$

Berechnung von c_1 und c_2 siehe Beispiel vor.

Beispiel 2





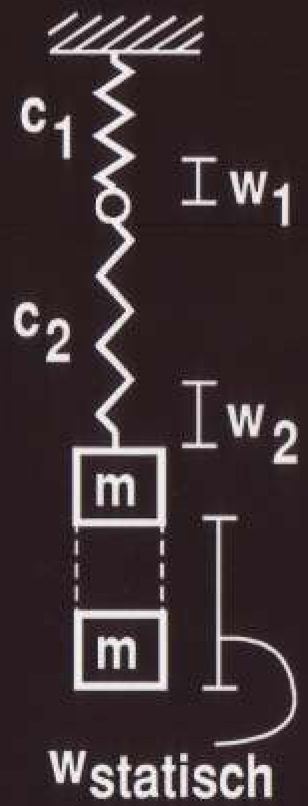
$$c_R = c_1 + c_2$$

Aus statisch unbestimmter Formänderungs-Berechnung

$$\delta_1 = \frac{m\,g\,h_1\,h_2}{h\,E\,A}, \quad c_1 = \frac{m\,g}{\delta_1}$$

$$\delta_2 = \frac{m\,g\,h_2\,h_1}{h\,E\,A}, \quad c_2 = \frac{m\,g}{\delta_2}$$

2.1.1.7 Reihenschaltung von Federn



Federwege : $w = w_1 + w_2 \quad (1)$

Federkräfte : $\left.\begin{aligned} F_1 &= c_1 w_1 \\ F_2 &= c_2 w_2 \end{aligned}\right\} (2)$

Gleichgewicht im Ruhezustand (statische Ruhelage)

$F_1 = F_2 = F \quad (3)$ mit $F = m\,g$

Aus (2): $w_1 = F_1 / c_1, \; w_2 = F_2 / c_2, \; w = F / c_R$

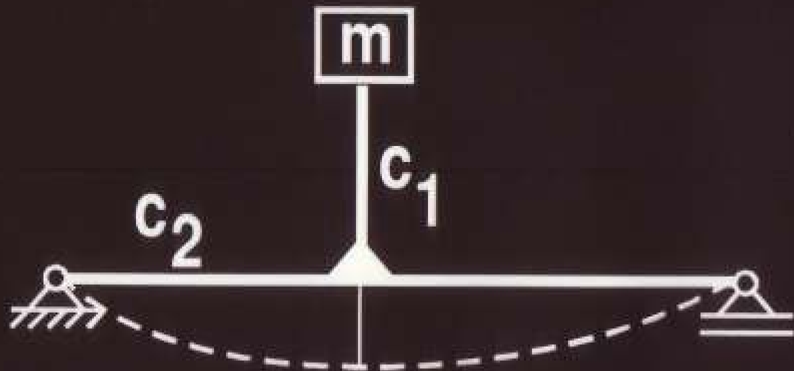
in (1) einsetzen : $\dfrac{F}{c_R} = \dfrac{F_1}{c_1} + \dfrac{F_2}{c_2}$

Wegen (3) : $\dfrac{1}{c_R} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} = \dfrac{c_1 + c_2}{c_1\, c_2}$

Daraus : $\boxed{c_R = \dfrac{c_1\, c_2}{c_1 + c_2}}$

c_R wird kleiner als c_1 oder c_2 einzeln → System weicher → Auslenkung größer.

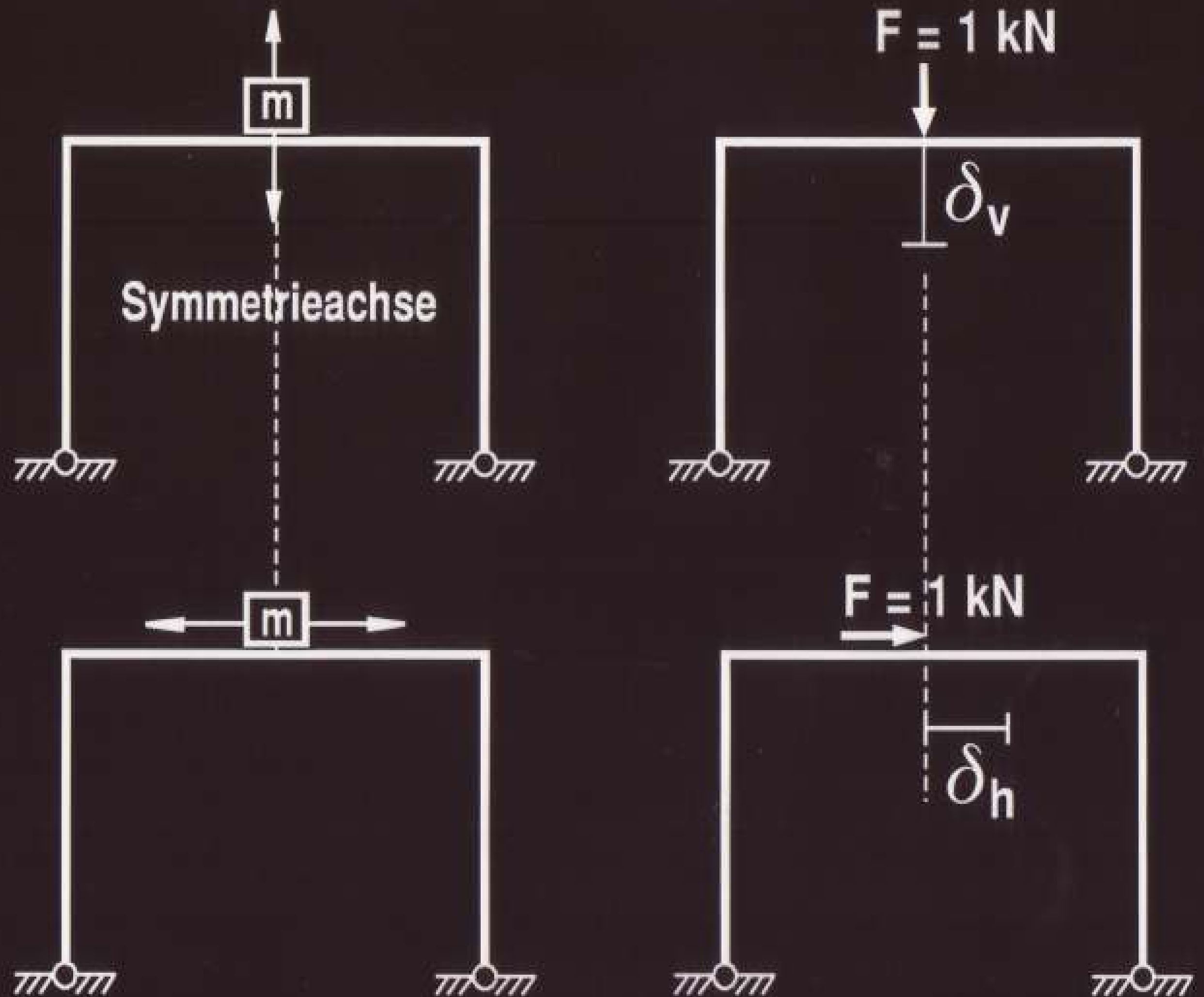
Beispiel



$$c_R = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

Berechnung von c_1 und c_2 siehe Beispiele vor.

2.1.1.9 Eigenfrequenzen von symmetrischen Rahmen



$$\delta_v = \ldots$$

$$c_v = F / \delta_v$$

$$\omega_v = \sqrt{\frac{c_v}{m}}$$

$$\delta_h = \ldots$$

$$c_h = F / \delta_h$$

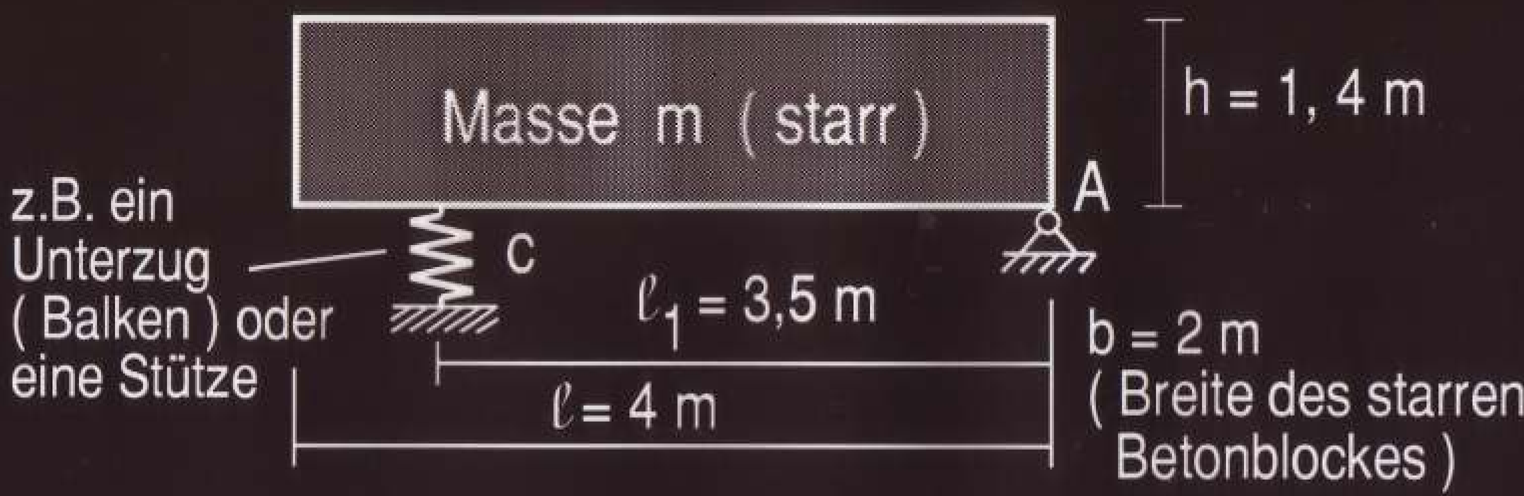
$$\omega_h = \sqrt{\frac{c_h}{m}}$$

2.1.1.10 Drehschwingungen

Erläuterung an einem Beispiel:

Ein starrer Betonblock führt eine Drehschwingung um " A " aus.

Gesucht: Eigenfrequenz f_0



$\rho = 2{,}4$ t / m^3 (Dichte)

c = 1 000 kN / m (Federkonstante)

m = $4 \cdot 1{,}4 \cdot 2 \cdot 2{,}4 = 26{,}9$ t (Masse Betonblock)

$G = m\,g = 10 \cdot 26{,}9 = 269$ t m / s^2 = 269 kN (Gewicht Betonblock)

$$\omega = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_A}}$$

Es bedeuten:

J_A = Massenträgheitsmoment bezogen auf den Punkt " A " in $t\,m^2$.

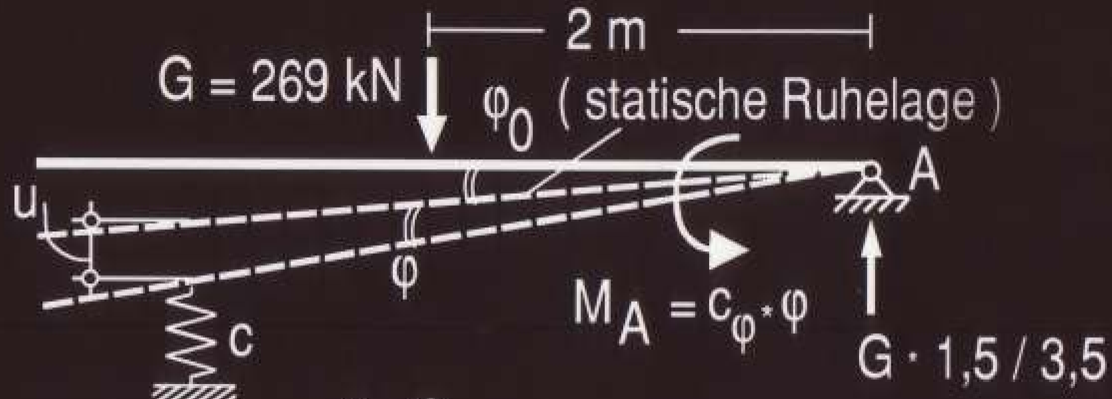
$$c_\varphi = \frac{M_{statisch}}{\varphi_{\text{infolge } M_{statisch}}} \quad \text{in kNm}$$

<u>. . . und nun zur Bestimmung der Drehfederkonstanten :</u>

Drehfederkonste c_φ= Größe des Momentes bezüglich " A ", das eine Verdrehung des Blockes von 1 rad

(1 rad im Bogenmaß entspricht $360^0 / 2\,\pi = 57{,}3^0$)

hervorruft und zwar von der statischen Ruhelage aus gemessen, um die der Block schwingt.



$$F_f \quad F_{f0} = \frac{2 \cdot G}{3{,}5} \quad (\text{aus } \Sigma M_A = 0)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$$

$$F_f \cdot 3{,}5 + \overbrace{F_{f0} \cdot 3{,}5 - 2\,G}^{=\,0 \ (\text{stat. Ruhelage})} - M_A = 0$$

$$\boxed{F_f \cdot 3{,}5 - M_A = 0} \quad (1)$$

Mit $F_f = c\,u = c \cdot \overbrace{\underset{=\,1\,\text{rad}}{\varphi} \cdot 3{,}5}^{u} = c \cdot 3{,}5$ und $M_A = c_\varphi \cdot \underset{=\,1\,\text{rad}}{\varphi} = c_\varphi$

wird (1) $\boxed{c \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 - c_\varphi = 0}$

$$c_\varphi = 1\,000 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12\,250 \text{ kNm} = \underline{12\,250} \ \frac{\text{t m}}{\text{s}^2}$$

... und das Massenträgheitsmoment bezogen auf " A "

Satz von Steiner

$$J_A = J_S + m\,r^2$$ (vgl. Dynamik, Abschn. 3.2)

eigener Anteil, bezogen auf
die Schwerachsen des Betonblockes

$$J_A = \frac{m}{12}\left(\ell^2 + h^2\right) + m\left[(0{,}5 \cdot \ell)^2 + (0{,}5 \cdot h)^2\right]$$

$$J_A = \frac{26{,}9}{12}\left(4^2 + 1{,}4^2\right) + 26{,}9\left(2^2 + 0{,}7^2\right) = \underline{161\ \mathrm{t\,m^2}}$$

Eigenkreisfrequenz (Anz. Vollschwingungen in 2π sec.)

$$\omega = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_A}} = \sqrt{\frac{12\,250}{161}\ \frac{\mathrm{t\,m^2}}{\mathrm{t\,m^2 \cdot s^2}}} = \underline{8{,}72\ \mathrm{rad/s}}$$

(z.B.: $\omega = 6{,}28$ rad / s = 360^0 / s = 1 Vollschw. / s)

Eigenfrequenz (Anz. Vollschwingungen je Zeiteinheit)

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8{,}72}{6{,}28}$$ = 1,39 Vollschwingungen / sec.
= 83,4 Vollschwingungen / min.