



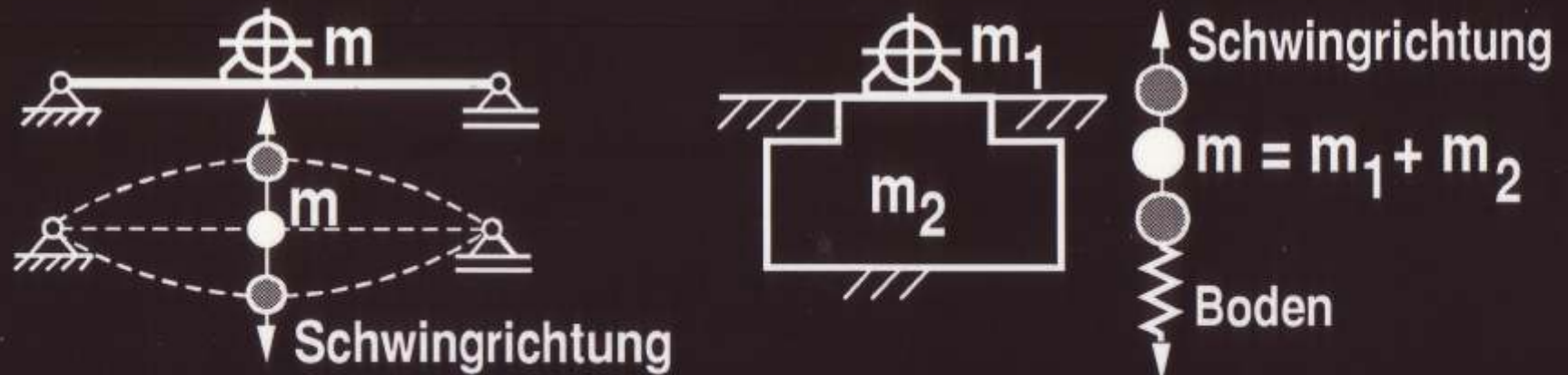
Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Baudynamik

BM 30

2 Schwingungen mit konzentrierten Massen

2.1 Harmonische Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad



2.1.1 Ungedämpfte freie Schwingungen

2.1.1.1 Ableitung der Differentialgleichung

Fall 1 : Horizontale Schwingung



F_f = Federkraft (Rückstellkraft)

F = Trägheitskraft nach d'Alembert (entgegen a)

$$\sum K = 0$$

$$F_f - F = 0$$

$$c u - m a = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} u = 0$$

$$c = \text{Federkonstante} = \frac{F_{\text{statisch}}}{u_{\text{infolge } F_{\text{statisch}}}} \quad \text{z.B. in } \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$m = \text{Masse}$

$$a = - \frac{d^2 u}{dt^2} = - \ddot{u} \quad (\text{Beschleunigung in Richtung negatives } u)$$

Differentialgleichung der horizontalen Schwingung

Fall 2 : Lotrechte Schwingung



$$\uparrow \Sigma K = 0$$

$$F_f - F - G = 0$$

$$c (u_0 + u) - m a - m g = 0$$

Bei u_0 ist statisches Gleichgewicht aus der Wirkung von $G = m g$ und $F_f = c u_0$, d.h. $m g - c u_0 = 0$

Es bleibt

$$c u - m a = 0 \quad (\text{Beschleunigung in Richtung negatives } u: a = -\ddot{u})$$

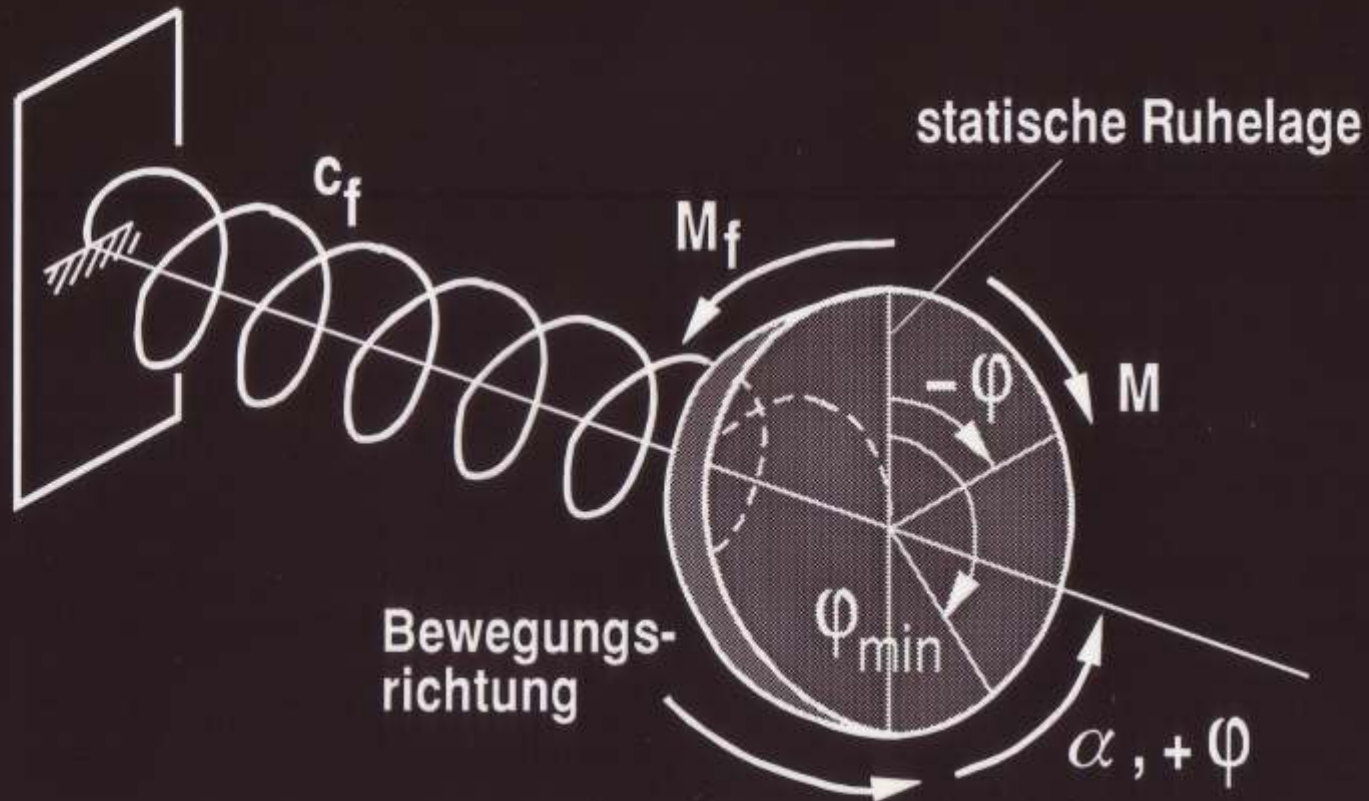
$$c u - m (-\ddot{u}) = 0$$

Daraus die Differentialgleichung der lotrechten Schwingung

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{c}{m} u = 0} \quad \text{wie "Horizontale Schwingung"}$$

Wichtiger Hinweis: Die Verschiebung u wird von der statischen Ruhelage aus gemessen !

Fall 3 : Drehschwingung



Zur Erinnerung :
Massenträgheitsmoment J
$$J = \int r^2 dm$$

Bis $\varphi_{\min}$ aus der statischen
Ruhelage verdreht und dann
losgelassen. Untersuchung
des Zustandes bei $-\varphi$

M_f = Torsionsmoment der Feder (Rückstellmoment)

M = Moment aus der Trägheitswirkung nach d'Alembert

c_f = Drehfederkonstante = $\frac{M_{\text{statisch}}}{\varphi_{\text{infolge } M_{\text{statisch}}}}$ z.B. in kNm

α = Winkelbeschleunigung

$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M = 0 \rightarrow M_f - M = 0$$

$$c_\varphi (-\varphi) - J \alpha = 0$$

$$\alpha = d^2\varphi / dt^2 = \ddot{\varphi}$$

Differentialgleichung
der
Drehschwingung

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_\varphi}{J} \varphi = 0$$

prinzipiell wie
Fall 1 und Fall 2

2.1.1.2 Lösung der Differentialgleichung (DGL)

DGL der freien ungedämpften linearen Schwingung

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} u(t) = 0$$

homogene lineare gewöhnliche
DGL 2. Ordnung

homogen: weil die rechte Seite Null ist

gewöhnlich: nur Ableitungen nach einer Variablen, hier: t

linear: die Funktion $u(t)$ und ihre Ableitungen treten linear auf

Bsp. für eine nichtlineare DGL: $\ddot{u}^2 + u^2 = 0$

2. Ordnung: weil die höchste Ableitung die zweite ist

Einführung einer neuen Konstanten ω zur Abkürzung

(anschauliche mechanische Deutung von ω s. Abschn. 2.1.1.3) :

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \longrightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \rightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0} \quad (1)$$

Die folgenden speziellen Funktionen sind Lösungen der DGL (1):

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= C_1 \sin(\omega t) \\ u_2(t) &= C_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Kontrolle durch Einsetzen} \\ \text{in die DGL (1)} \end{array}$$

Diese beiden Funktionen sind voneinander unabhängig und bilden die allgemeine Lösung der DGL (1)

$$u(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (2)$$

Zur Umformung ersetzen wir die beiden Konstanten C_1 und C_2 durch zwei neue Konstanten A und α :

$$C_1 = A \cos \alpha \quad \text{und} \quad C_2 = A \sin \alpha$$

Dann wird die Lösung (2) zu

$$u(t) = A \left[\cos \alpha \cdot \sin(\omega t) + \sin \alpha \cdot \cos(\omega t) \right] \quad (3)$$

$$u(t) = A \left[\cos \alpha \cdot \sin(\omega t) + \sin \alpha \cdot \cos(\omega t) \right] \quad (3)$$

Zur Umformung von (3) Verwendung des folgenden Additionstheorems für trigonometrische Funktionen :

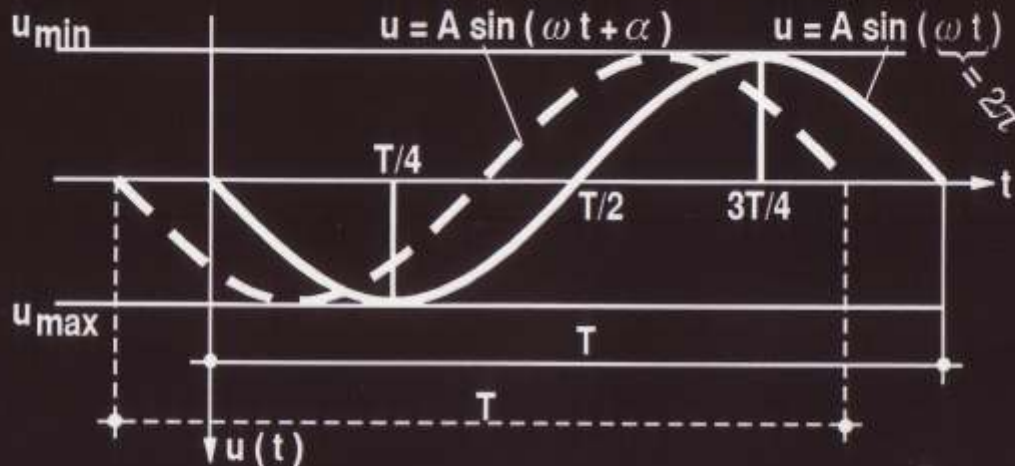
$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y$$

Mit ($x = \alpha$ und $y = \omega t$)

wird aus der Lösung (3): $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ (4)

A, α = Konstanten, die aus Rand- und Übergangsbedingungen zu bestimmen sind (siehe unten)

Grafische Darstellung der Lösung (4)



T = Zeitdauer einer Vollschiwingung
 α = Nullphasenwinkel,
 gibt lediglich die Verschiebung einer
 Schwingung $u = A \sin(\omega t + \alpha)$
 im Vergleich zu $u = A \sin(\omega t)$ an

Aus der Zeichnung: $\omega t = 2\pi$ mit $t = T$ für eine Vollschiwingung
 $\omega = \text{konst} = \phi / t = 2\pi / T$ (als Winkelgeschwindigkeit einer
 gleichmäßigen Kreisbewegung deubar)

Genauere Erklärung für ω siehe Abschnitt 2.1.1.3.

Bestimmung der Konstanten A in $u = A \sin(\omega t)$

$$t = T/4, u = u_{\max} \rightarrow u_{\max} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}\right) \rightarrow u_{\max} = A$$

Lösung: $u(t) = u_{\max} \sin(\omega t)$

Harmonische Schwingung,
 die zur Zeit $t = 0$ durch die
 statische Ruhelage geht.

Grafische Darstellung des Schwingers

