



Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Kinetik

BM 28

3 Kraftwirkungen am Körper bei der Rotation

3.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation



Zur Erinnerung: $v = r \omega$

Kraft in Tangentialrichtung

$$dF_t = dm \cdot a_t = dm \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$dF_t = dm \cdot r \cdot \frac{d\omega}{dt} = dm \cdot r \cdot \alpha$$

Moment bezogen auf die Drehachse

$$dM = r \cdot dF_t = \alpha \cdot r^2 \cdot dm \longrightarrow \int dM = \alpha \int r^2 \cdot dm = \alpha \cdot J$$

$$\boxed{M = \alpha \cdot J} \text{ mit } J = \int r^2 \cdot dm \quad [\text{kgm}^2], [\text{Nms}^2], (\text{kgm/s}^2 = \text{N})$$

Dynamisches Grundgesetz der Rotation eines Körpers

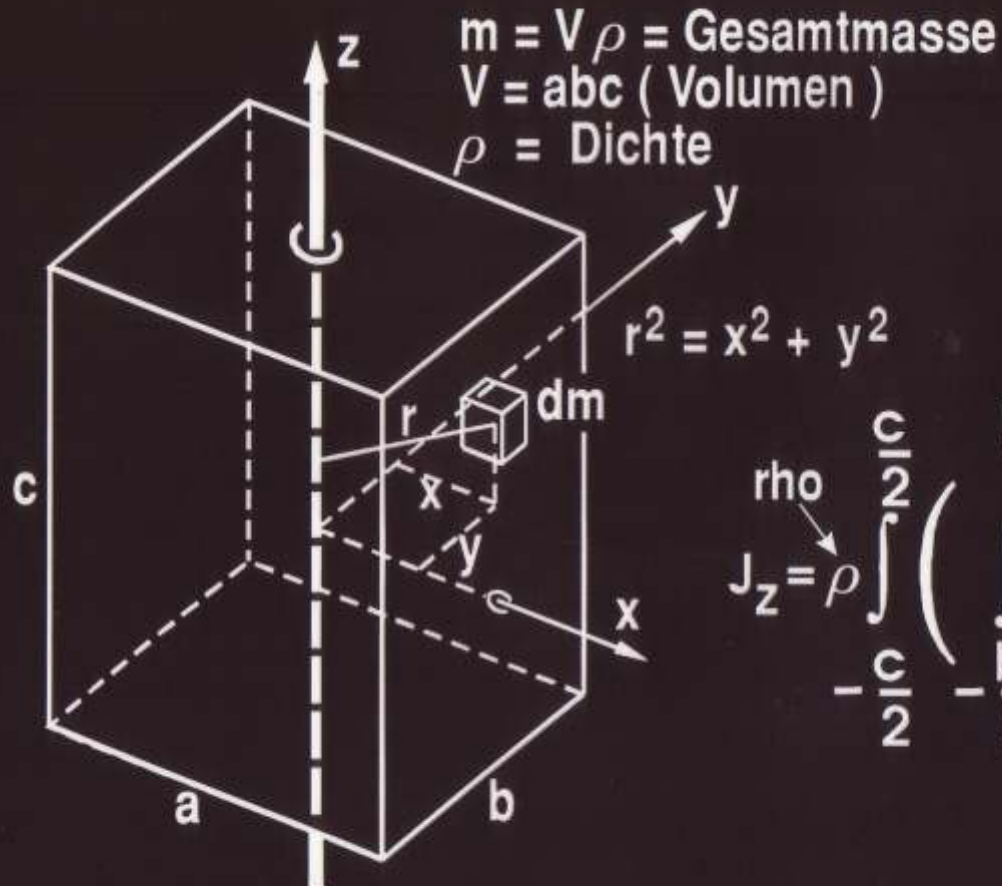
J = Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf die Drehachse, abhängig von der geometrischen Form des Körpers, der Lage der Drehachse und der Massenverteilung im Körper.

vgl. $F = ma$ (dyn. Grundgesetz der Translation)

3.2 Massenträgheitsmomente (dynamische Trägheitsmomente)

Zur Erinnerung: $J = \int r^2 \cdot dm = \rho \int r^2 \cdot dV$ (ρ = Dichte, als konst. im Körper angen.)

a. Massenträgheitsmoment eines Quaders (bez. auf die Schwerachse z)



$$J_z = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) dx \right) dy \right) dz$$

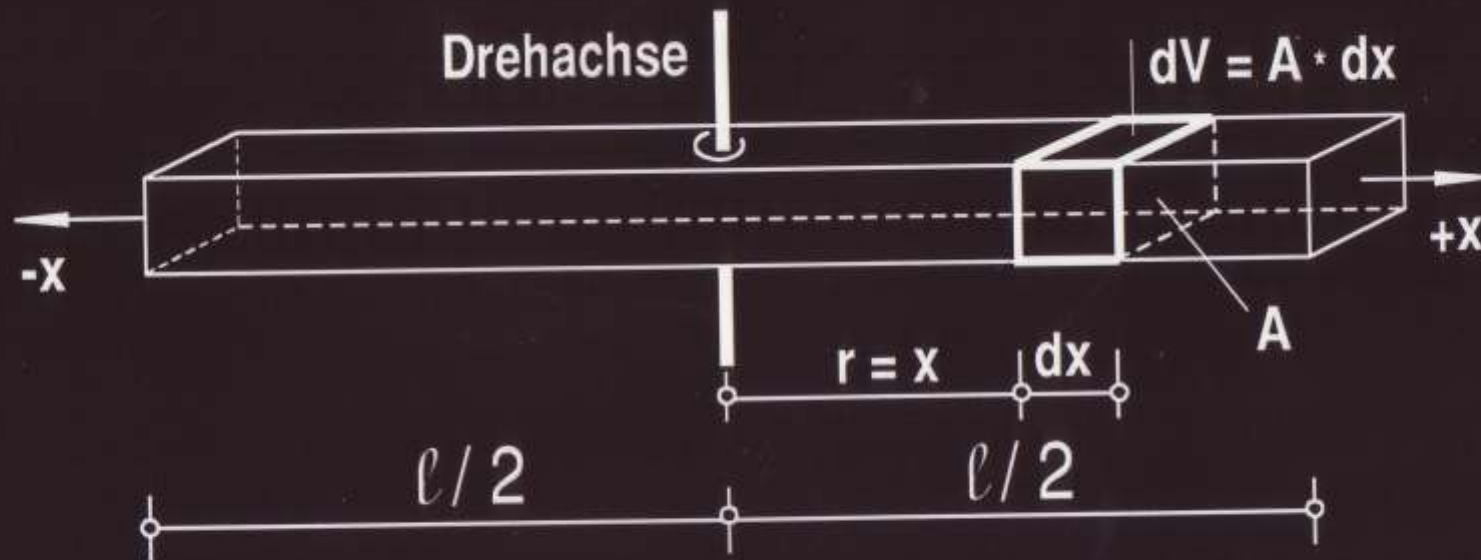
$$J = \frac{1}{12} \rho a b c (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Einfacher Sonderfall

Massenträgheitsmoment eines sehr dünnen Stabes,
bez. auf die Schwerachse

Zur Erinnerung:

$$J = \int r^2 \cdot dm = \rho \int r^2 \cdot dV \quad (\rho = \text{Dichte, konst. angenommen})$$



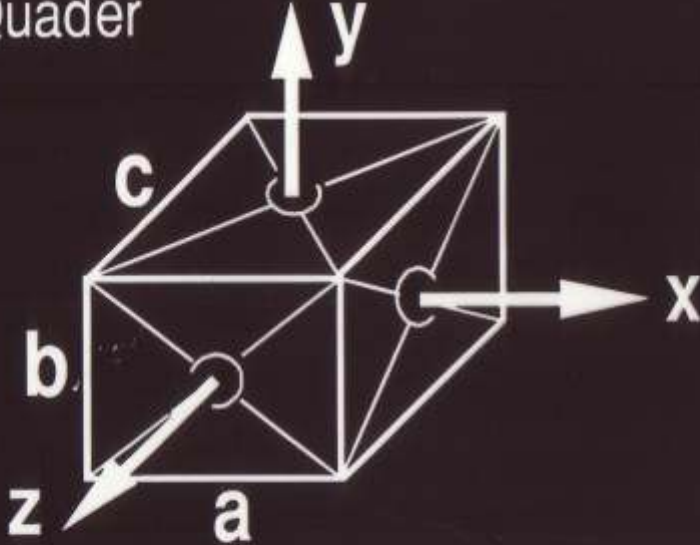
$$J = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} r^2 \cdot dV = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \cdot A \cdot dx = \rho A \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \cdot dx$$

$$J = \rho A \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \rho A \left(\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24} \right) = \rho A \frac{\ell^3}{12}$$

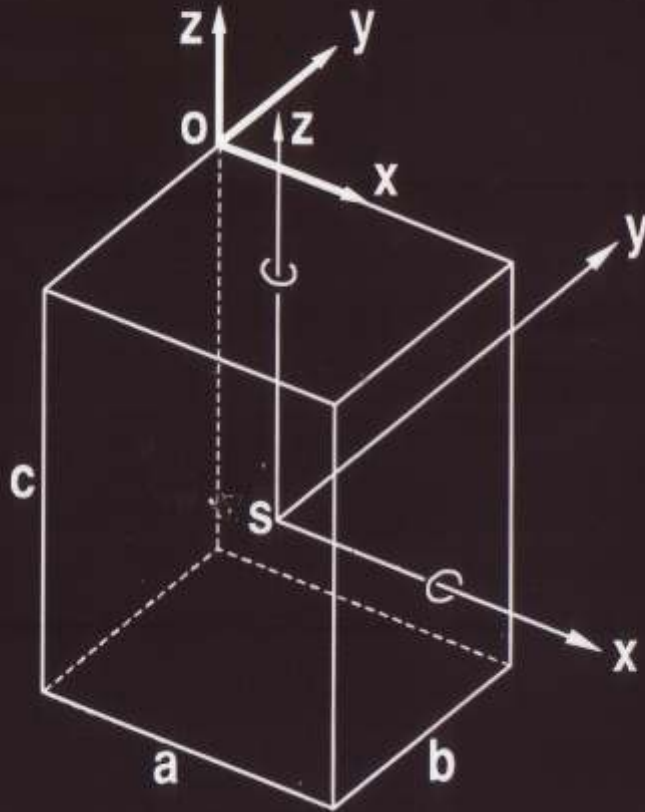
$$J = \underbrace{\rho \cdot \underbrace{A \cdot \ell}_V}_{m} \cdot \frac{\ell^2}{12} = m \frac{\ell^2}{12} \quad \text{z. B. [kg m}^2\text{]}$$

**b. Massenträgheitsmomente für ausgewählte Körper
(bez. auf die Schwerachse)**

Körper	Vollzylinder Walze	Vollkugel	Dünnwandiger Hohlzylinder
			
J	$\frac{m}{2} r^2$	$\frac{2}{5} m r^2$	$m r^2$

Körper	Massenträgheitsmoment J
Quader 	$J_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$ $J_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2)$ $J_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$

c. Satz von Steiner (ohne Ableitung)



Massenträgheitsmoment
bez. auf die Achse o - z

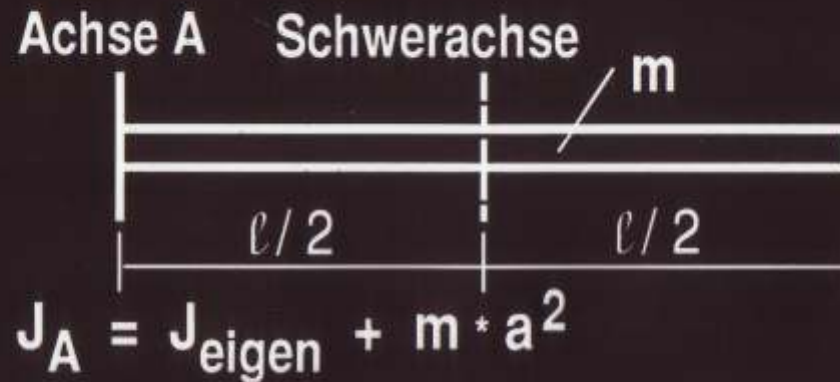
$$J_{Oz} = J_{Sz} + m (y_s^2 + x_s^2)$$

o - z = Achse,
parallel zur Schwerachse s - z

J_{Sz} = Massenträgheitsmoment,
bezogen auf die Schwerachse
(= J eigen)

y_s, x_s = senkrechte Abstände von
den Schwerachsen bis zu
den dazu parallelen
Achsen o - y bzw. o - x

Beispiel : Langer dünner Stab



A = eine Achse, parallel zur Schwerachse

J_{eigen} = Massenträgheitsmoment, bez. auf Schwerachse

m = Gesamtmasse des Körpers

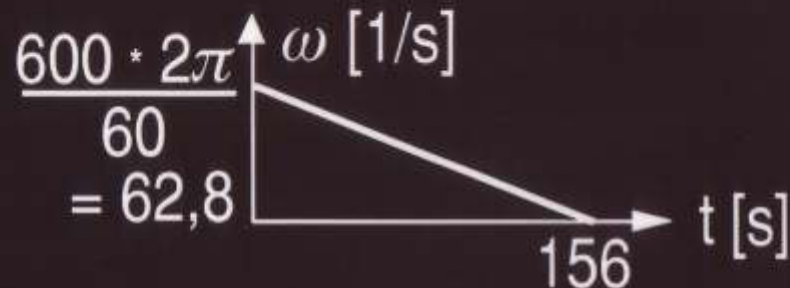
a = senkr. Abstand zw. Schwerachse und Achse "A"

$$J_A = J_{\text{eigen}} + m \cdot a^2 \longrightarrow J_A = \underbrace{m \frac{\ell^2}{12}}_{\text{siehe vor}} + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = m \frac{\ell^2}{3}$$

Beispiel (Anwendung Massenträgheitsmoment)

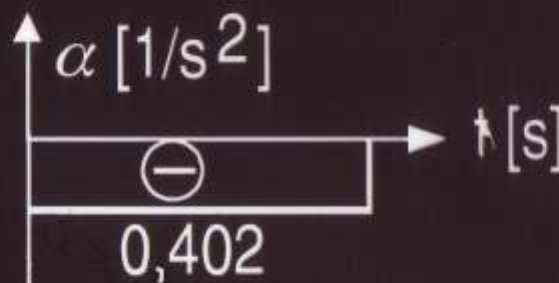
Ein Schleifstein mit einem Massenträgheitsmoment von 4 Nms^2 wird aus einer Drehzahl von 600 U/min abgeschaltet und läuft während $2,6 \text{ min}$ aus, wobei die Winkelgeschwindigkeit linear abnimmt.

Wie groß ist das Drehmoment, das bremsend an der Welle wirkt ?



$$\omega(t) = -\frac{62,8}{156} t + 62,8$$

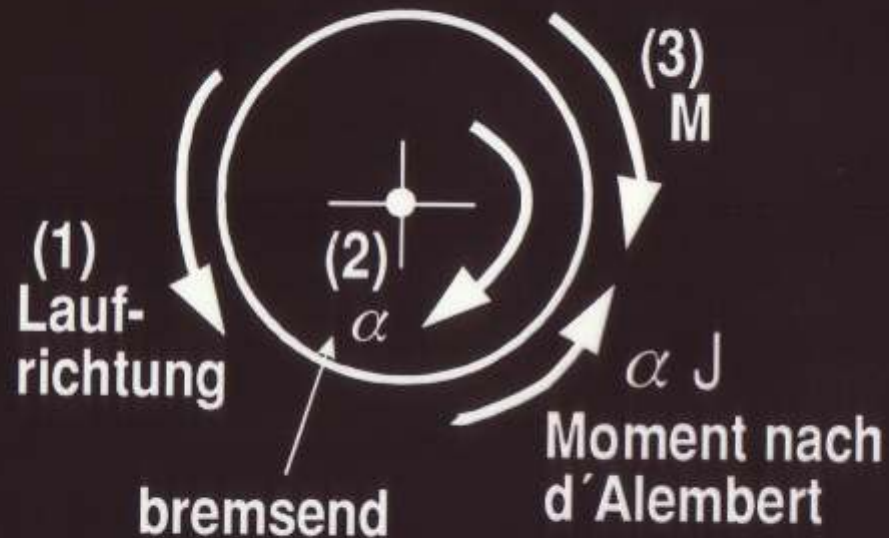
$$\omega(t) = -0,402 t + 62,8$$



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -0,402$$

Dieses Vorzeichen hätte man auch weglassen können und α nachfolgend als bremsend deuten können !

Prinzip von d'Alembert



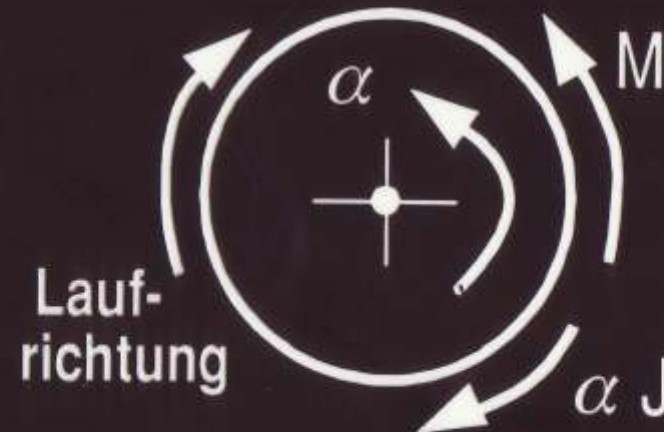
$$\Sigma M = 0$$

$$M - \alpha J = 0$$

$$M = - 0,402 \cdot 4$$

$$\underline{\underline{M = - 1,61 \text{ Nm}}}$$

Deutung der Vorzeichen
in Wirklichkeit →



3.3 Drehimpulssatz (ohne Ableitung)

$J \cdot \omega = \text{Drehimpuls (Drall)}$ vgl. $m \cdot v = \text{Impuls}$

$$\boxed{J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2}$$

gilt für 2 rotierende Massen,
die gekoppelt sind

Beispiel

Auf einer geraden Achse sind zwei homogene Kreisscheiben verschiebbar gelagert. Scheibe 1 dreht sich und wird an die ruhende Scheibe 2 gekoppelt.

Wie groß ist die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit nach dem Kuppeln ?

$$m_1 = 10 \text{ kg} , \quad m_2 = 30 \text{ kg} , \quad r_1 = 30 \text{ cm} , \quad r_2 = 90 \text{ cm}$$

$$\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1} \quad (\text{etwa } 1,5 \text{ U/s}) , \quad \omega_2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \text{einzelne Drehimpulse} & & \text{gemeinsames } \omega \\ J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 & = & (J_1 + J_2) \omega_3 \end{array}$$

$$J_1 = \frac{m_1}{2} r_1^2 = \frac{10}{2} 0,3^2 = 0,45 \text{ [kg m}^2 \text{]}$$

$$J_2 = \frac{m_2}{2} r_2^2 = \frac{30}{2} 0,9^2 = 12,15 \text{ [kg m}^2 \text{]}$$

$$0,45 \cdot 10 = (0,45 + 12,15) \omega_3$$

$$\left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad \left[\text{kg m}^2 \right] \quad \left[1/\text{s} \right]$$

$$\omega_3 = 0,357 \text{ s}^{-1} = \frac{180^0}{\pi} 0,357 \frac{1}{\text{s}} = 20,45 \text{ Grad/s}$$