Diethard Thieme

Skripte
zur Baumechanik

Kinetik

BM 26

DIADEM-HETHITER-VERLAG.DE

Teil V: Kinetik (Bewegungslehre mit Kräftewirkung)

1 Kräfte am Massenpunkt bei der Bewegung auf gerader Bahn

1.1 Dynamisches Grundgesetz

a. Grundgesetz

$F \sim a$ (aus Erfahrung), $\sim$ proportional

m = Masse

$\boxed{F = m \cdot a}$ (Newtonsches Grundgesetz, dynamisches Grundgesetz)

b. Maßeinheiten

Masse m: g, kg, t

Kraft F: N, kN, $kg\, m / s^2$, $t\, m / s^2$

Def.: $\boxed{1\,N = 1\,kg\,m / s^2}$

$1\,kN = 1\,t\,m / s^2$

Beispiel $m = 600\,kg$

Erdbeschleunigung g

$F = m\,a = 600\,kg \cdot 10\,m/s^2 = 6000\,kg\,m/s^2 = 6000\,N = 6\,kN$

c. Abwandlung des Grundgesetzes

$$F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Wichtiger Sonderfall:

konst. Kraft F und konst. Beschleunigung a

$$v = \int a\,dt = a\,t \;\longrightarrow\; a = v/t,\; t = v/a$$

$$s = \int v\,dt = \int a\,t\,dt = a\,t^2/2 \;\longrightarrow\; a = 2s/t^2$$

Aus $s = a\,t^2/2$ folgt mit $t = v/a \longrightarrow s = v^2/2a,\; a = v^2/2s$

oder aus $s = a\,t^2/2$ folgt mit $a = v/t \longrightarrow s = v\,t/2$

Zusammenstellung
(konst. Kraft, konst. Beschleunigung)

$$\boxed{F = m\,a = m\,\frac{v}{t} = m\,\frac{v^2}{2s} = m\,\frac{2s}{t^2}}$$

Beispiel

Ein Waggon hat eine Masse von 15 t.

a. Wie groß muß die konst. Zugkraft der Lok sein, damit der Waggon nach 25 s eine Geschwindigkeit von 2 m/s erreicht hat ?

b. Wie groß ist der bis dahin zurückgelegt Weg ?

Daten: $m = 15\ t$, $v = 2\ m/s$, $t = 25\ s$

a) $F = m\,a = m\,v / t = 15 \cdot 2 / 25 = 1{,}2\ \underbrace{t\,m / s^2}_{kN} = 1{,}2\ kN$

b) $s = v\,t =$ falsch ! das gilt für $v =$ konst., aber hier: $a =$ konst.

$$s = m \frac{v^2}{2F} = 15 \frac{2^2}{2 * 1{,}2} = 25\ m$$

oder: $s = v\,t / 2 = 2 \cdot 25 / 2 = 25\ m$

1.2 Impulssatz

a. Impuls und Kraftstoß bei einer Masse

$$F = m\frac{dv}{dt} \rightarrow F\,dt = m\,dv \rightarrow \int F\,dt = \int m\,dv$$

Wichtiger Sonderfall: konstante Kraft F

Nach Integration beider Seiten $\boxed{F\,t = m\,v + C}$

Bestimmung der Konstanten C

Fall 1: $t = 0,\ v = v_o$ (m bewegt sich mit v_o, bevor F auf sie einwirkt)

$$C = -m\,v_o \rightarrow F\,t = m\,v - m\,v_o$$

Fall 2: $t = 0,\ v = 0$ (m war in Ruhe, bevor F auf sie einwirkt)

$C = 0 \rightarrow \boxed{F\,t = m\,v}$ Impulssatz für 1 Masse

$m\,v$ = Impuls, $F\,t$ = Kraftstoß

b. Anwendung auf Mehrmassensysteme
(ohne Ableitung)

$$\boxed{m_1 v_1 = m_2 v_2}$$

Impulssatz für ein System aus 2 Massen m_1 und m_2, die in Wechselwirkung stehen.

Beispiel

Ein Waggon hat eine Masse von 20 t und rollt mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s.

Senkrecht von oben werden 5 t Kies zugeschüttet.

Mit welcher Geschwindigkeit rollt er weiter ?

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 20\ \text{t}\,,\ m_2 = m_1 + 5 = 25\ \text{t} \\ v_1 = 0{,}5\ \text{m/s}\,,\ v_2 = ? \end{array}\right\}\ \text{System}$$

Impulssatz

$$20 \cdot 0{,}5 = 25 \cdot v_2 \ \rightarrow\ v_2 = 0{,}4\ \text{m/s}$$

1.3 Arbeit

a. Formen der Arbeit

$$A = \int F(s)\, ds$$ (wenn F sich längs des Weges ändert)

<u>Sonderfall 1:</u> Arbeit der Schwerkraft

$F = G =$ konst. (G = Gewicht)

$$A = \int_0^s G\, ds = G\, s$$ (s = gehobene Höhe)

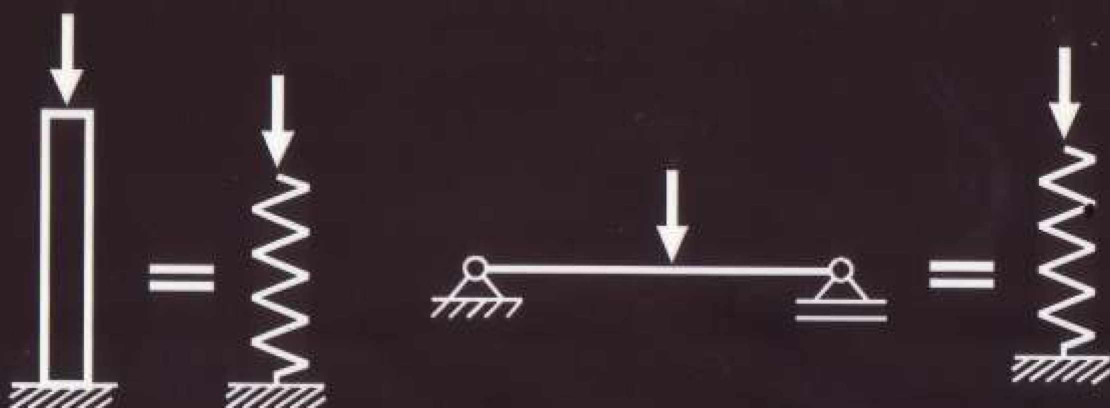
Sonderfall 2: Arbeit einer Feder

c = Federkonstante , Federsteifigkeit [kN/m]

$F(s) = c\,s$

$$A = \int F(s)\,ds = \int c \cdot s \cdot ds = c \cdot s^2 / 2$$

Idealisierung von Tragwerken als Federn in der Baudynamik bei der Schwingungsberechnung



b. Maßeinheiten der Arbeit

N m, kN m, J, kJ (J = Joule)

$$\boxed{1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}}$$ Definition !

$$1\,\mathrm{kN\,m} = 1\,\mathrm{t}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kJ} = 0{,}239\,\mathrm{kcal} \quad (\text{alt})$$

$$1\,\mathrm{kWh} = 3600\,\mathrm{kN\,m} = 860\,\mathrm{kcal}$$

1.4 Energie

Jede physikalische Größe, die einer Arbeit gleichwertig ist, wird Energie genannt.

a. Potentielle Energie

<u>Sonderfall 1:</u> Lageenergie im Schwerefeld der Erde

$$W_{pot} = G\,h = m\,g\,h$$

<u>Sonderfall 2:</u> Verformungsenergie einer Feder

$$W_{pot} = c\,s^2 / 2$$

Beispiel

Ein Pumpspeicherwerk pumpt eine Wassermenge von 5000 m^3 auf eine Höhe von 40 m.
Wieviel potentielle Energie [kWh] wurde gewonnen ?

(Schätzen: Eine 100 W - Glühbirne könnte wie viele Stunden brennen ?)

$$m = \rho V = 1 \frac{t}{m^3} \cdot 5000\ m^3 = 5000\ t$$

ρ : Dichte

$$W_{pot} = m\,g\,h = 5000 \cdot 10 \cdot 40 \quad \underbrace{t\,\frac{m}{s^2}}_{kN}\ m$$

$$W_{pot} = 2\,000\,000\ kN\,m = \frac{2\,000\,000}{3600}\ kWh$$

$$W_{pot} = 556\ kWh \qquad (1\ kWh = 3600\ kN\,m)$$

(100 W - Birne brennt 5560 h)

b. Kinetische Energie

$$F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt}$$

Mit $v = v\,[s(t)]$ nach Kettenregel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = v\,\frac{dv}{ds}$$

wird

$$F = m\,v\,\frac{dv}{ds} \longrightarrow F\,ds = m\,v\,dv$$

$$W_{kin} = \int F\,ds = \int m\,v\,dv = m\,v^2/2$$

c. Energieerhaltungssatz

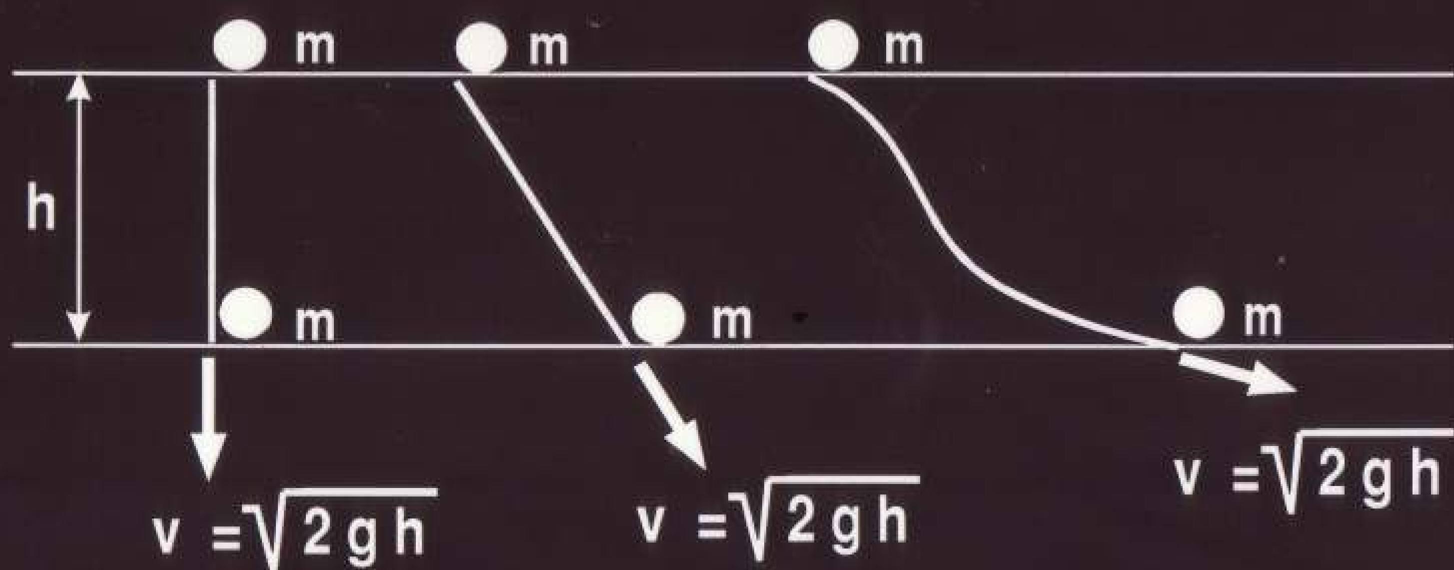
Ohne Ableitung: $W_{pot} + W_{kin} = \text{konstant}$

$W_{pot} = W_{kin}$ (Die gesamte pot. E. geht in kin. E. über)

$m\,g\,h = m\,v^2/2$

$v = \sqrt{2\,g\,h}$ (unabhängig von der Form des Weges, da der Weg nicht eingeht)

Beispiel



1.5 Prinzip von d´Alembert

Rückführung dyn. Aufg. auf stat. Aufg. (Gleichgewichtsaufg.)

<u>Newtonsches Grundgesetz</u>

Dynamische Aufgabe

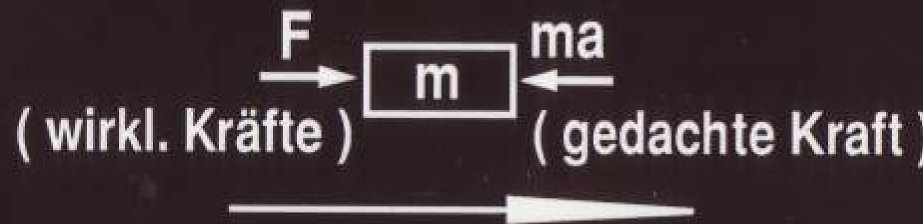
Beschleunigung a

$$\boxed{F = ma}$$

Die Masse *m* wird durch die Kraft *F* mit *a* beschleunigt.

<u>Prinzip von d´Alembert</u>

Statische Aufgabe



Beschleunigung a

Die gedachte Trägheitskraft *ma* wird <u>immer entgegen</u> der Richtung der Beschleunigung *a* angesetzt.

$$\overrightarrow{\Sigma} K_h = 0 \rightarrow \boxed{F - ma = 0}$$

Beim Prinzip von d´Alembert werden 2 "Fehler" gemacht

1. Einführung einer gedachten Trägheitskraft ma, die immer entgegen der Richtung von a anzusetzen ist.

2. Anwendung der Gleichgewichtsbedingung auf bewegte Körper.

Beide "Fehler" heben sich auf !

Hinweis zur Anwendung:

Dyn. Aufg. können entweder mit dem Newtonschen Grundgesetz oder mit dem Prinzip von d´Alembert gelöst werden.

Das P. v. d´A. ist günstig, wenn Beschleunigungen oder Kräfte gesucht werden; es ist ungünstig für die Ermittlung von Geschwindigkeiten, Wegen und Zeiten.

Beispiel

Ein Wagen mit der Masse von $m = 2\,t$ soll mit $1{,}2\,m/s^2$ beschleunigt werden.

Wie groß muss die Schubkraft am Wagen sein, wenn die Reibungskraft an den Rädern 1/10 der Eigenlast des Wagens und der Windwiderstand 0,8 kN beträgt ?

$$\sum \vec{K}_h = 0$$

$$F - F_{Reib} - F_{Wind} - m \cdot a = 0$$

$$F - \frac{1}{10}\, 2 \cdot \underbrace{10}_{g} \underbrace{\left[\frac{tm}{s^2}\right]}_{kN} - 0{,}8\,[kN] - 2 \cdot 1{,}2 \underbrace{\left[\frac{tm}{s^2}\right]}_{kN} = 0$$

$$F - 2 - 0{,}8 - 2{,}4 = 0\,, \quad \underline{\underline{F = 5{,}2\,kN}}$$