



Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Kinematik

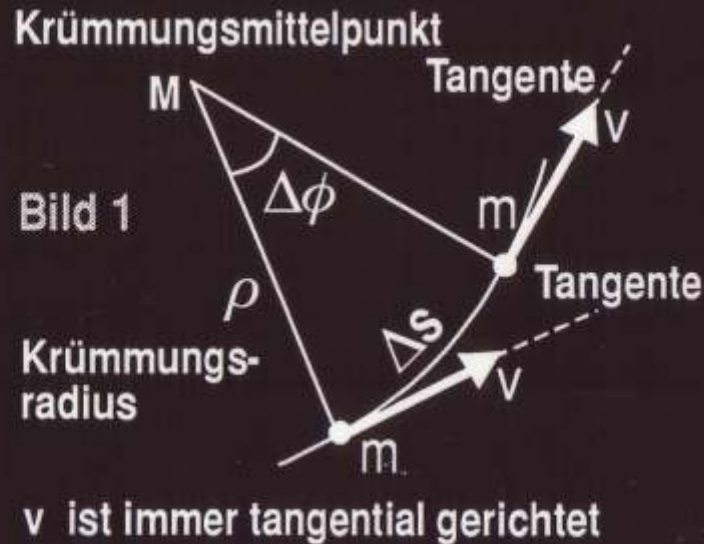
BM 25

2 Bewegung auf krummliniger Bahn

2.1 Normal- und Tangentialbeschleunigung

a. Normalbeschleunigung

Voraussetzung: Die Geschwindigkeit v des Massenpunktes soll konstant bleiben (gleichförmige Bewegung)



aus Bild 2: $\Delta v = v \Delta \phi$ (1)

aus Bild 1: $\Delta \phi = \Delta s / \rho$ eingesetzt in (1)

$$\Delta v = v \Delta s / \rho \quad | \cdot 1 / \Delta t$$

$$\Delta v = v \Delta s / \rho \quad | \cdot 1 / \Delta t$$

$$\begin{array}{l} \Delta v \perp \text{ auf } v \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\rho} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ \text{(Bild 2)} \\ \lim \Delta t \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{gerichtet} \\ \text{nach M} \end{array} \left\{ \frac{dv}{dt} = \frac{v}{\rho} v \right.$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

a_n = Normal- oder Zentripetal-
beschleunigung, gerichtet
zum Krümmungsmittelpunkt M

Bei der Bewegung auf krummliniger Bahn gibt es selbst bei konstanter Geschwindigkeit v eine Beschleunigung in Richtung Krümmungsmittelpunkt.

b. Tangentialbeschleunigung

$$a_t = dv / dt \quad (\text{zeigt in Richtung Tangente,} \\ \text{d.h. in Richtung Geschwindigkeit } v)$$

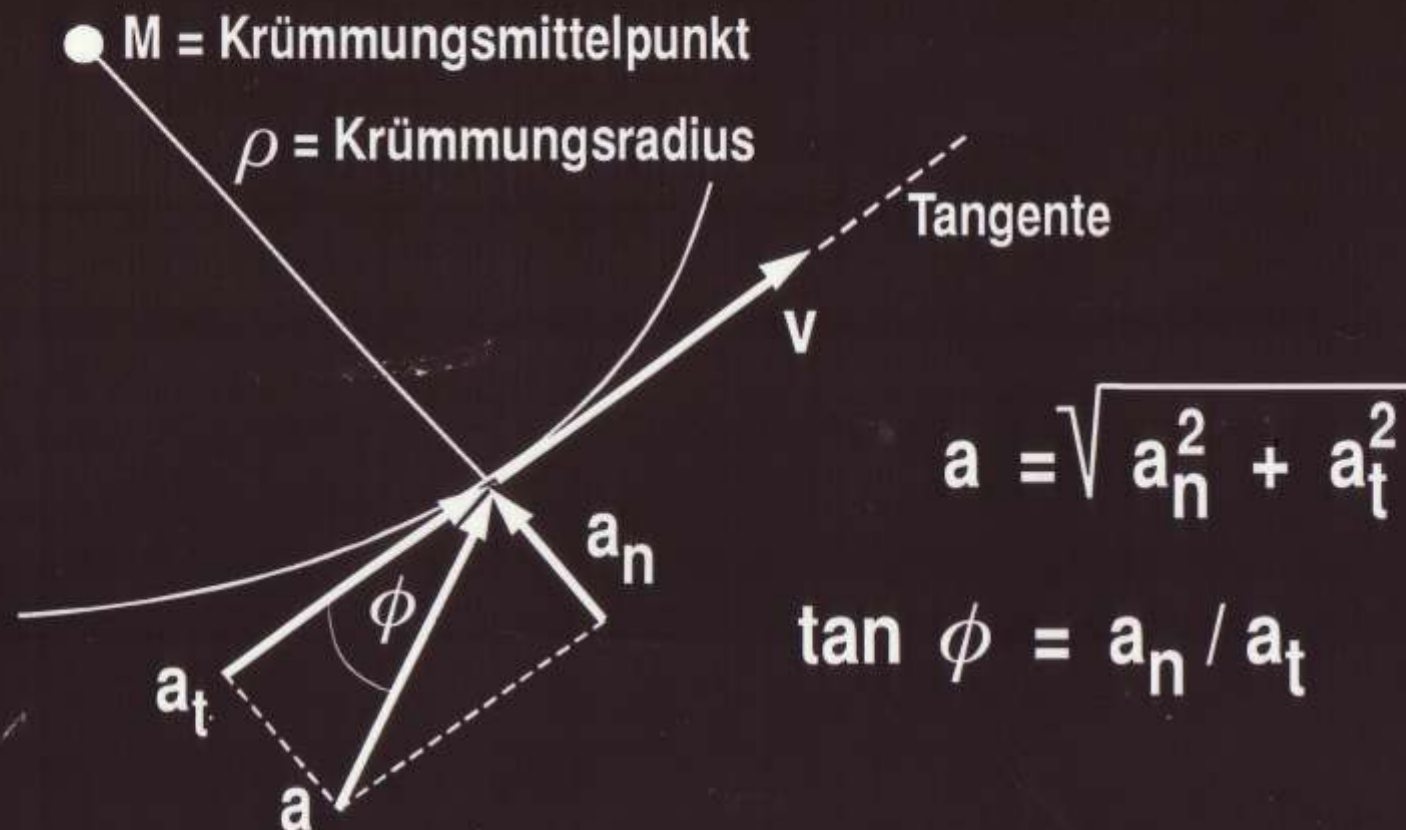
c. Grenzfall: gerade Bahn

$$a_n = 0 \quad (\text{wegen } \rho \rightarrow \infty)$$

$$a_t = dv / dt = a$$

Bei gerader Bahn ist die Tangentialgeschleunigung identisch mit der bekannten Beschleunigung a .

d. Gesamtbeschleunigung

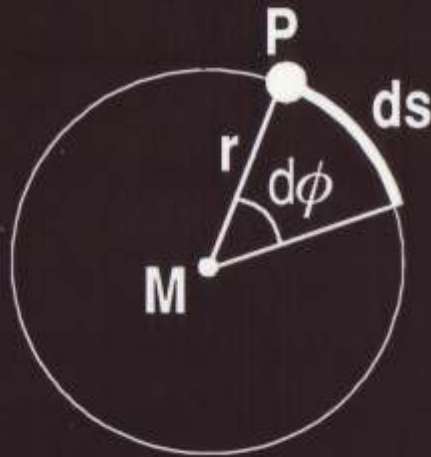


Die Richtung der Gesamtbeschleunigung und der Geschwindigkeit fallen nicht zusammen. Sie bilden den Winkel ϕ miteinander. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist immer tangential gerichtet.

2.2 Bewegung auf der Kreisbahn

2.2.1 Allgemeine Darstellung

a. Winkelgeschwindigkeit ω



Weg $ds = r d\phi$ (vgl. $U = r \cdot 2\pi$)

Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi / dt$

Bahngeschwindigkeit

$$\underbrace{v = ds / dt = r \cdot d\phi / dt = r \omega}_{\text{Bahngeschwindigkeit}} \rightarrow \boxed{\omega = v / r}$$

$$\frac{v}{r} = \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

nach Ableiten nach t

b. Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} a_t$$

c. Normal- und Tangentialbeschleunigung

Aus $a_n = v^2/\rho$ wird mit $\rho = r$ (r für Kreis)

$$a_n = v^2/r = r \omega^2 = v \omega$$

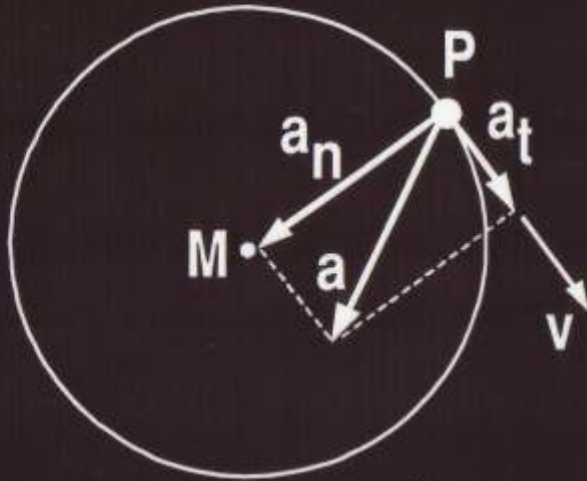
└ mit $\omega = v / r$

a_n = Normal- oder
Zentripetalbeschleunigung.,
gerichtet nach M

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha$$

a_t = Tangentialbeschleunigung
in Richtung Bahn-
geschwindigkeit v

d. Gesamtbeschleunigung



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{r^2 \alpha^2 + r^2 \omega^4}$$

$$a = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

2.2.2 Gleichförmige Kreisbewegung ($\omega = \text{konst}$)

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \phi / t = \text{konst}$

(ϕ im Bogenmaß z.B. $0,0123 \cdot \pi$)

Bahngeschwindigkeit $v = r \omega = r \phi / t = \text{konst}$

Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega / dt = 0$

Tangentialbeschleunigung $a_t = dv / dt = 0$

Normalbeschleunigung

$$a_n = v^2 / r = r \omega^2 = v \omega = r \left(\frac{\phi}{t} \right)^2 = \text{konst}$$

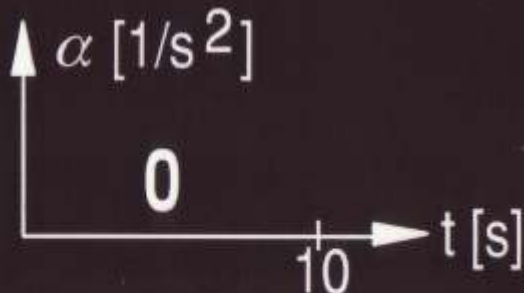
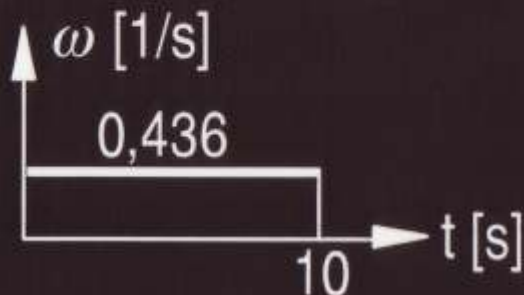
Beispiel: Eine Punktmasse führt eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius $r = 5 \text{ m}$ aus.
Nach 10 s hat sie einen Winkel von $\phi = 250^\circ$ zurückgelegt.

Gesucht

a. Bewegungsgleichungen und Diagramme

$\alpha(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, $v(t)$, $a_t(t)$ und $a_n(t)$

b. Wie groß ist der zurückgelegte Weg auf dem Kreisbogen ?



$$\frac{\hat{\phi}}{\phi^0} = \frac{6,28}{360^\circ}$$

$$\hat{\phi} = \frac{2\pi * \phi^0}{360^\circ} = \frac{6,28 * 250^\circ}{360^\circ} = 4,36$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \phi / t = 4,36 / 10 = 0,436 \text{ [1/s] , [rad/s]}$$

$$1 \text{ rad} \hat{=} 180^\circ / \pi = 57,29... \text{ Grad}$$

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = d\omega / dt = 0$$

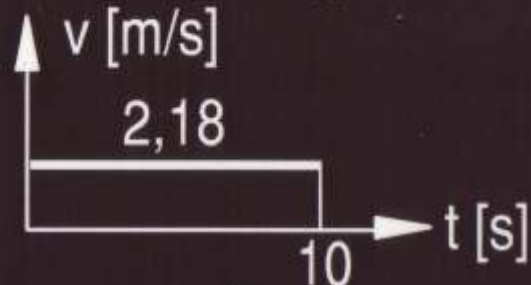
Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 0,436$ [rad/s] Winkelbeschleunigung: $\alpha = 0$



Zurückgelegter Winkel ϕ

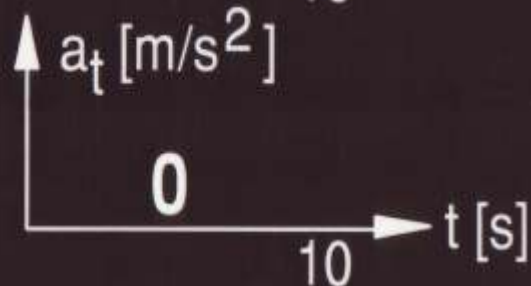
$$\phi = \omega t = 0,436 t$$

$$\phi(t = 10) = 4,36 \text{ rad}$$



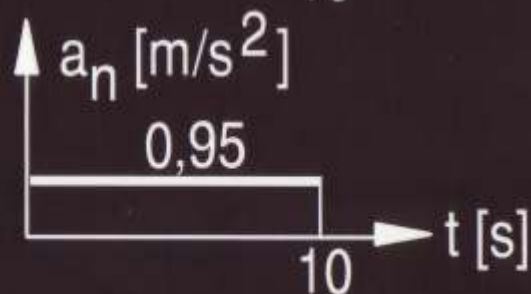
Bahngeschwindigkeit v

$$v = r \omega = 5 \cdot 0,436 = 2,18 \text{ [m/s]}$$



Tangentialbeschleunigung a_t

$$a_t = dv / dt = 0$$



Normalbeschleunigung a_n

$$a_n = v^2 / r = 2,18^2 / 5 = 0,95 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Zurückgelegter Weg s

$$s = v t = 2,18 \cdot 10 = 21,8 \text{ m}$$

$$\text{oder } s = r \hat{\phi} = 5 \cdot 4,36 = 21,8 \text{ m}$$

2.2.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \omega / t = \text{konst}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha t$ (lineare Funktion)

Bahngeschwindigkeit: $v = r \omega$ (lineare Funktion)

Tangentialbeschleunigung: $a_t = r \alpha = r \omega / t$ (konst)

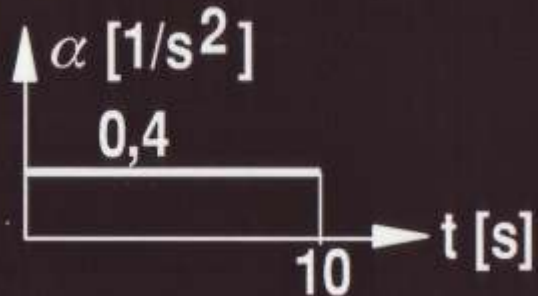
Normalbeschleunigung: $a_n = v^2 / r = \underbrace{r \omega^2}_{v = r \omega} = v \omega$
(quadr. Parabel)

Beispiel : Eine Punktmasse bewegt sich aus dem Stillstand gleichförmig beschleunigt auf einer Kreisbahn mit $r = 5 \text{ m}$. Nach 10 s erreicht sie eine Geschwindigkeit von 20 m/s .

Gesucht : a. Bewegungsgleichungen und Diagramme

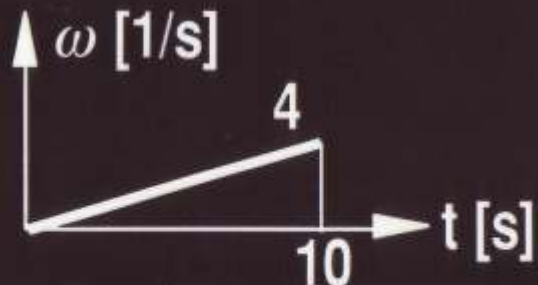
$\alpha(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, $v(t)$, $a_t(t)$ und $a_n(t)$

b. Wie groß ist der zurückgelegte Weg auf dem Kreisbogen ?



Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{v}{r t} = \frac{20}{5 \cdot 10} = 0,4 \text{ [1/s}^2\text{]}$$

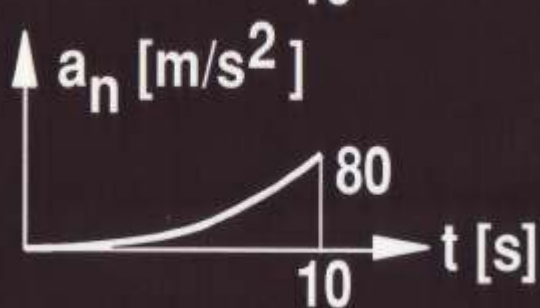
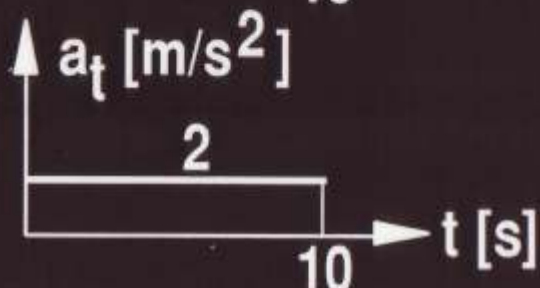
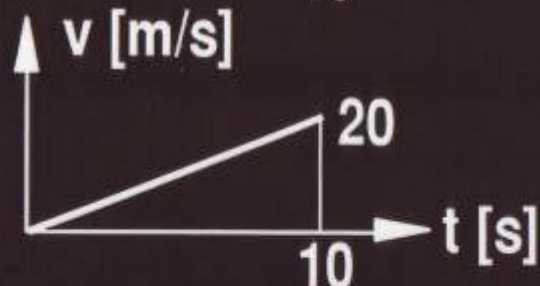


Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \alpha t = 0,4 t$$

$$\omega (t = 10) = 4 \text{ [1/s]}$$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = 0,4 \text{ [1/s}^2\text{]}$ Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha t = 0,4 t$



$$\phi = \int \omega dt = \int 0,4 \cdot t dt = 0,2 \cdot t^2 + C$$

$$t = 0, \phi = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow \boxed{\phi = 0,2 \cdot t^2}$$

$$\phi(t=10) = 20 \text{ [-] bzw. [rad]} \approx 3 \text{ Runden}$$

$$v = r \omega = 5 \cdot 0,4 \cdot t = 2 t$$

$$v(t=10) = 20 \text{ [m/s]}$$

Tangentialbeschleunigung

$$a_t = r \alpha = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Normalbeschleunigung

$$a_n = r \omega^2 = 5 \cdot 0,4^2 \cdot t^2 = 0,8 t^2$$

$$a_n(t=10) = 80 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$s = r \widehat{\phi} = 5 \cdot 20 = 100 \text{ m}$$

$$\text{oder } s = \int v dt = \int 2t dt = t^2 + \overset{0}{C} = t^2$$

$$s(t=10) = 100 \text{ m}$$