



Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Stabtragwerke

BM 15

10.5 Winkelgeschwindigkeiten und Bahngeschwindigkeiten der Scheiben

Die an einer kinematischen Kette auftretenden Verrückungen (Verschiebungen und Verdrehungen) können auf die Zeit bezogen werden:

Verdrehung $\phi \Rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi / dt$

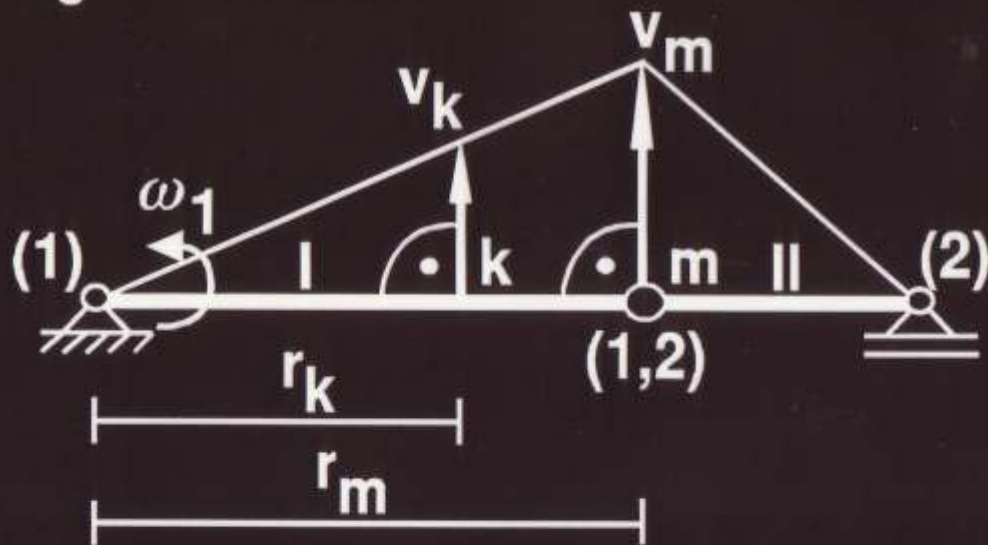
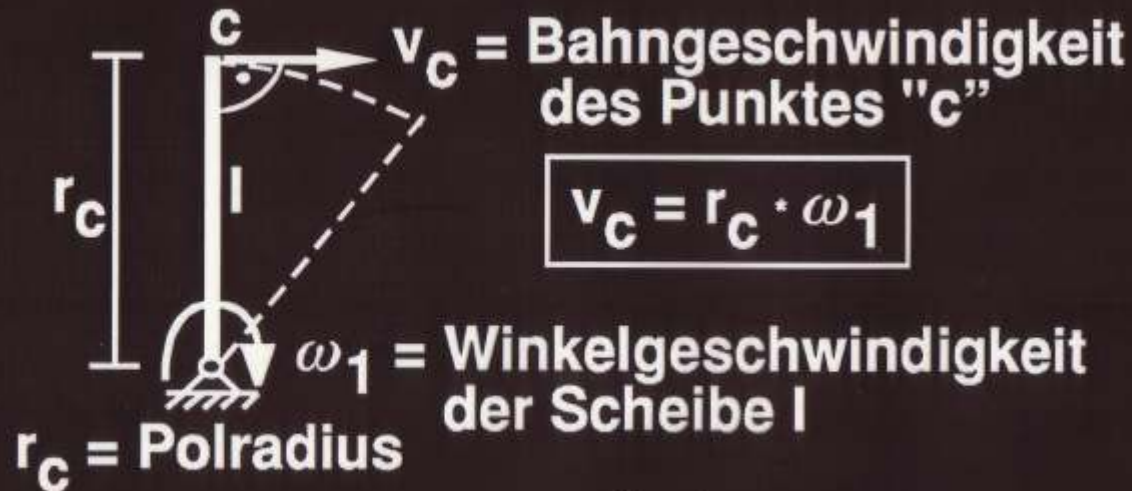
Verschiebung $s \Rightarrow$ Bahngeschwindigkeit $v = ds / dt$

10.6 Regeln zur Ermittlung der Winkel- und Bahngeschwindigkeiten

1. Zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω einer Scheibe und der Bahngeschwindigkeit v eines Punktes dieser Scheibe besteht die Beziehung

$$v = r \cdot \omega$$

r = Polstrahl (Polradius) vom HP bis zu dem entsprechenden Punkt

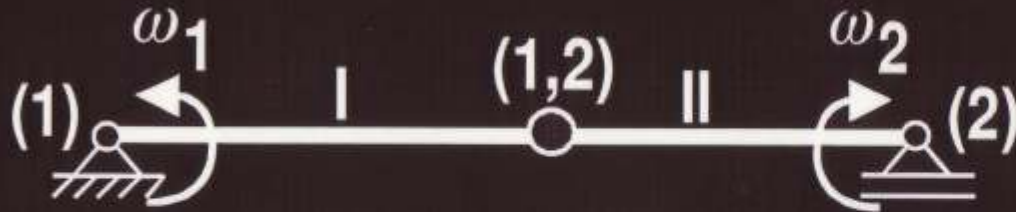


$$v_k = \omega_1 \cdot r_k$$

$$v_m = \omega_1 \cdot r_m$$

Die Bahngeschwindigkeit v und der Polradius r bilden einen rechten Winkel.

2. Entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten



Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 drehen entgegengesetzt, wenn (1,2) zwischen (1) und (2) liegt.

3. Gleichgerichtete Winkelgeschwindigkeiten



Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 drehen im gleichen Sinn, wenn (1,2) außerhalb von (1) und (2) liegt.

10.7 Arbeitsgleichung (Energetische Gleichgewichtsbedingung)

Die Arbeit der äußeren Kräfte (Lasten) und der inneren Kräfte (M, Q, N) ist bei einer virtuellen (gedachten) Verrückung (Verschiebung oder Verdrehung) der kinematischen Kette Null, wenn die kinematische Kette im Gleichgewicht ist.

Arbeit = $\left. \begin{array}{l} \text{Kraft} \cdot \text{Verschiebung (Bahngeschwindigkeit)} \\ \text{Moment} \cdot \text{Verdrehung (Winkelgeschwindigkeit)} \end{array} \right\}$

$$A = \sum_i F_i \cdot v_i + \sum_j M_j \cdot \omega_j$$

Die Arbeit ist positiv, wenn Kraft und Bahngeschwindigkeit (Moment und Winkelgeschwindigkeit) gleichgerichtet sind.

Beispiel

(dafür, dass die Arbeit an der kin. Kette Null ist,
wenn das Tragwerk im Gleichgewicht ist)

Tragwerk im Gleichgewicht



Arbeit an kinematischer Kette ist Null
(virtuelle Verschiebung nach links)

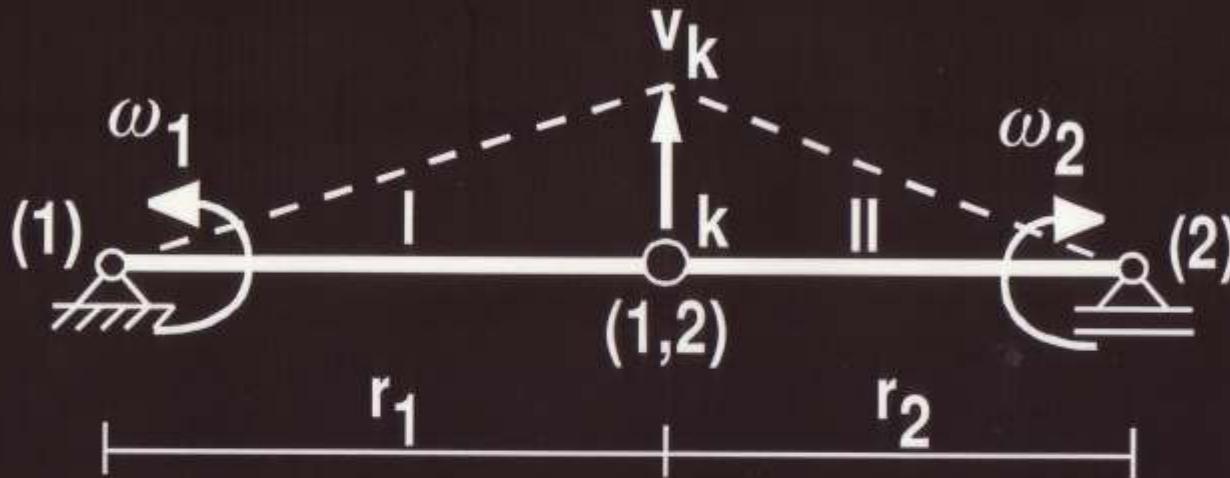


$$- F u + F u = 0$$

↑ Minus, da F (Stützkraft) entgegen u wirkt

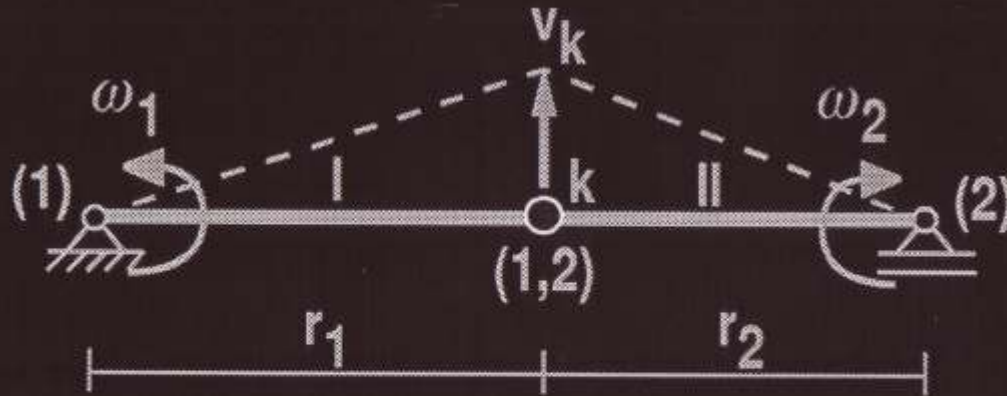
10.8 Verträglichkeitsbedingung

Die kinematische Kette führt eine zwangsläufige Bewegung aus.



Wenn z.B. die Winkelgeschwindigkeit ω_1 zahlenmäßig vorgegeben ist, dann liegt auch ω_2 zahlenmäßig fest.

Die Winkelgeschwindigkeiten werden aus der Verträglichkeitsbedingung berechnet:



**Verträglichkeit der Bahngeschwindigkeiten
 v_{k1} und v_{k2} im Punkt "k" im Nebenpol (1,2):**

$$v_{k1} = v_{k2}$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (\text{wegen } v = r \omega)$$

Daraus die Verträglichkeitsbedingung

$$\boxed{\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}} \quad (\omega_1 \text{ frei gewählt})$$

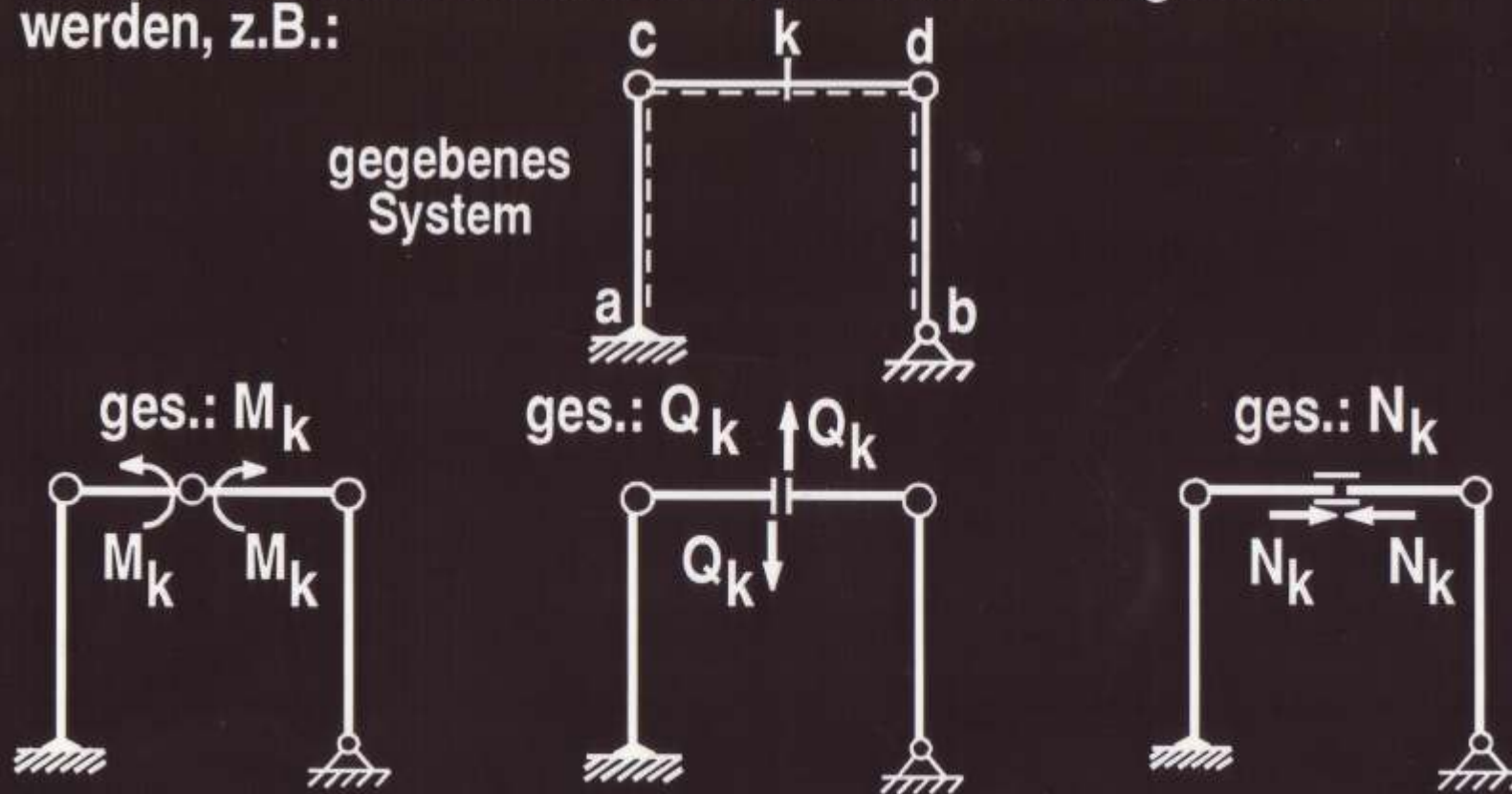
r_1 = Polstrahl von (1) bis (1,2)

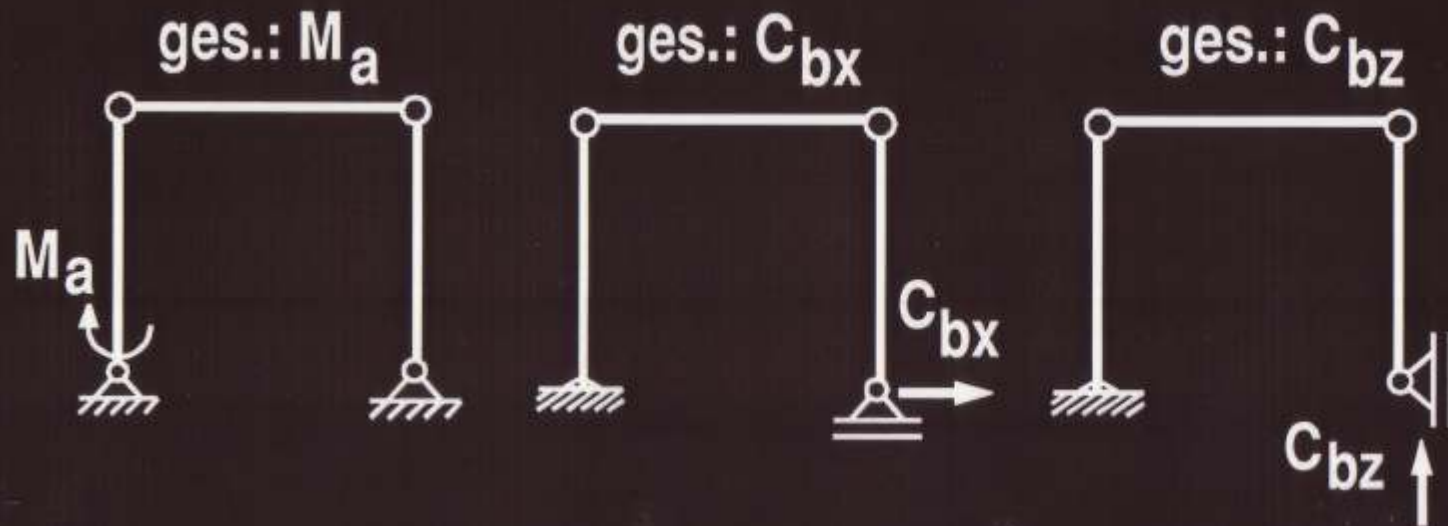
r_2 = Polstrahl von (2) bis (1,2)

10.9 Beispiele für die Berechnung der Stütz- und SK mit dem Arbeitssatz an der kin. Kette

Vorbemerkung

Zur kin. Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte muss jeweils eine Bindung am stat. best. System entfernt werden und die entsprechende unbekannte Stütz- oder SK angesetzt werden, z.B.:

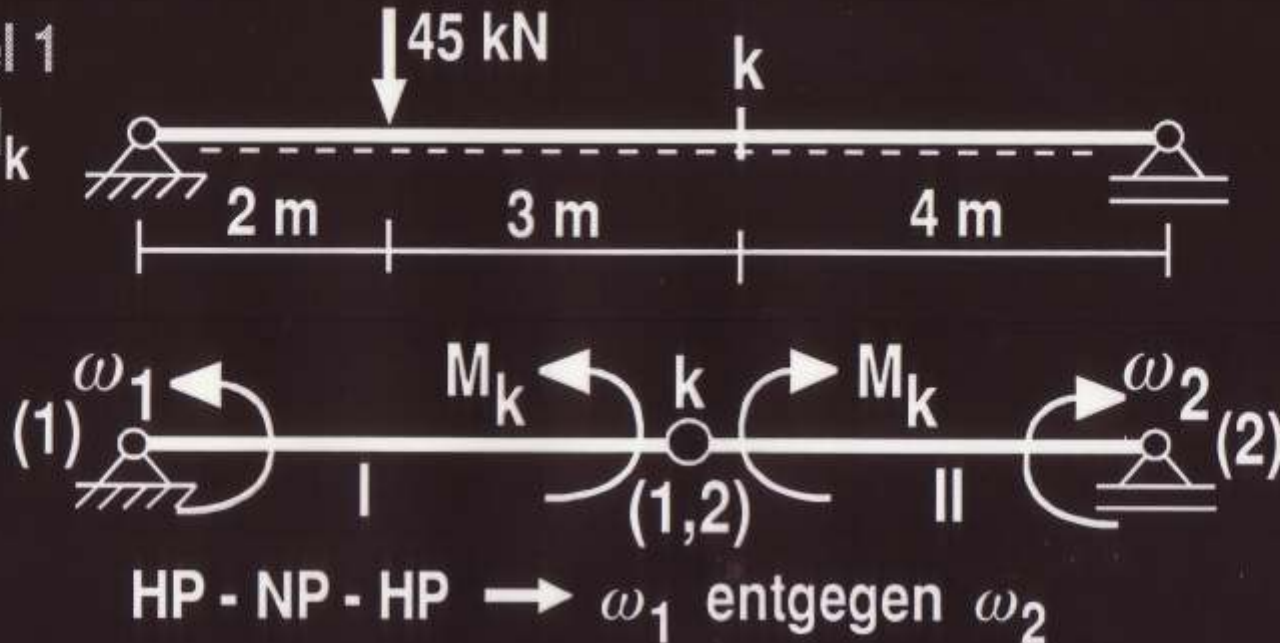




Die Stützkräfte können (wie üblich) beliebig angesetzt werden - die SK aber mit ihren pos. Definitionen.

Beispiel 1

ges.: M_k



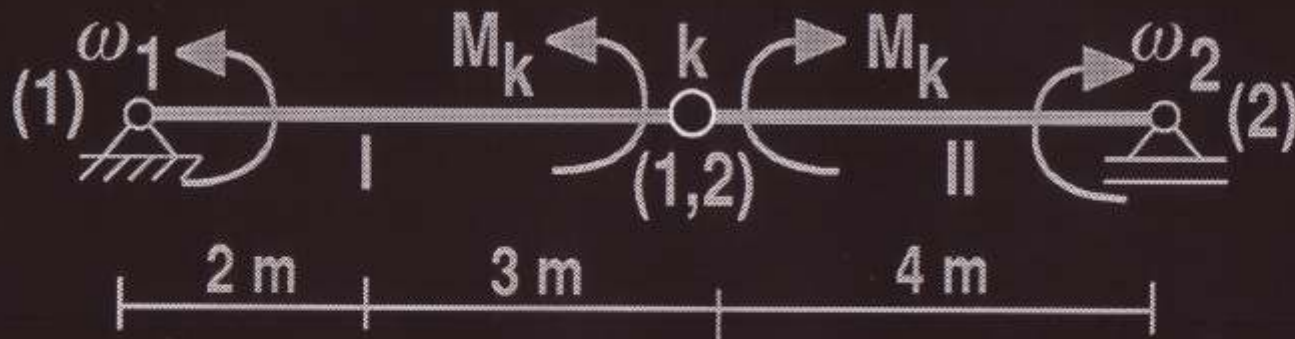
Arbeitsgleichung

entweder: $F \cdot v$ (aus $v = r \cdot \omega$)

$$M_k \cdot \omega_1 + M_k \cdot \omega_2 - \underbrace{45 \cdot 2}_{\text{oder: } M} \cdot \omega_1 = 0$$

oder: $M \cdot \omega$

Behandlung der Einzellast F : Man kann aus F auch ein Moment durch Multiplikation mit dem Abstand bis HP (1) bilden und dann $M \cdot \omega$ verwenden oder $F \cdot v$ verwenden.



Arbeitsgleichung

$$M_k \cdot \omega_1 + M_k \cdot \omega_2 - 45 \cdot 2 \cdot \omega_1 = 0$$

Verträglichkeitsbedingung im NP (1,2)

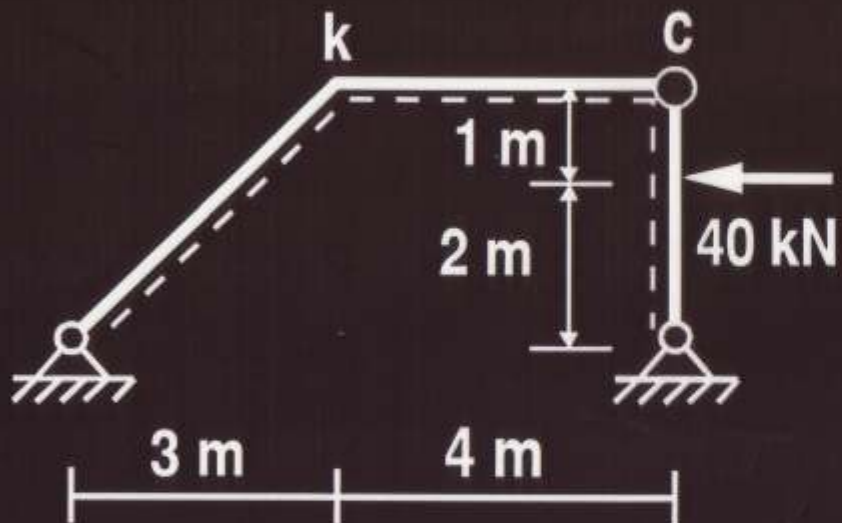
$$v_{k1} = v_{k2} \rightarrow \omega_1 \cdot 5 = \omega_2 \cdot 4 \rightarrow \omega_2 = 1,25 \omega_1$$

Lösung der Arbeitsgleichung

$$M_k \cdot \omega_1 + M_k \cdot 1,25 \omega_1 - 90 \cdot \omega_1 = 0, \quad \omega_1 \text{ ist beliebig,} \\ \text{z.B. } \omega_1 = 1 \text{ wählen}$$

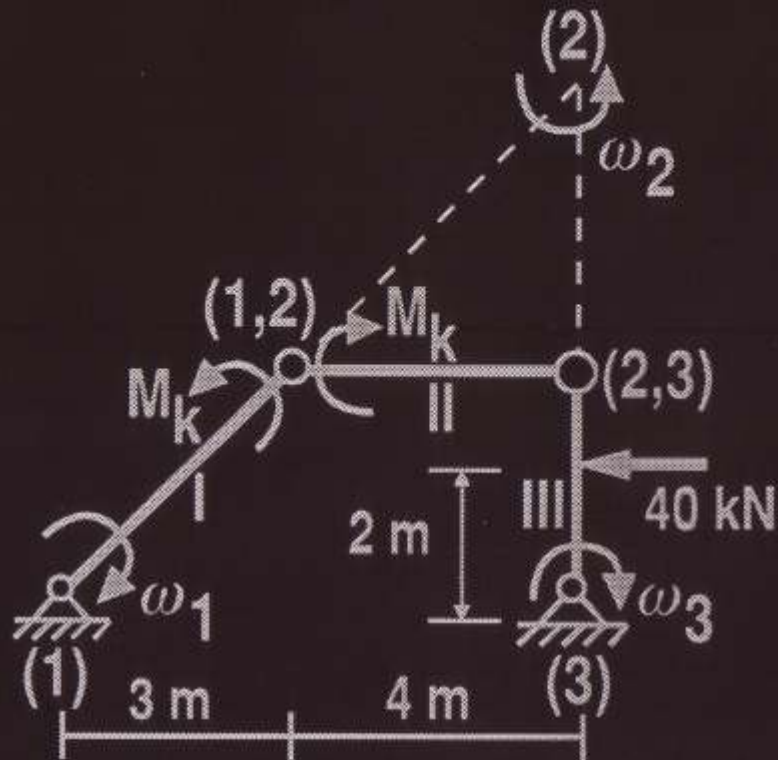
$$M_k = 90 / 2,25 = 40$$

Beispiel 2
ges.: M_k



Die Winkel-
geschwindigkeiten
werden in den HP
angetragen.





Drehsinn von ω_1 frei gewählt

Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned}
 & -M_k \cdot \omega_1 - M_k \cdot \omega_2 - \overbrace{40 \cdot 2}^M \cdot \omega_3 = 0 \\
 & -M_k \cdot \omega_1 - M_k \cdot 3 \omega_1 / 4 - 40 \cdot 2 \cdot \omega_1 = 0 \\
 & M_k = -45,7
 \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_i müssen durch ein einziges ω ausgedrückt werden: z.B. durch ω_1

Statt der Polradien kann man ihre horizontalen oder vertikalen Projektionen verwenden.

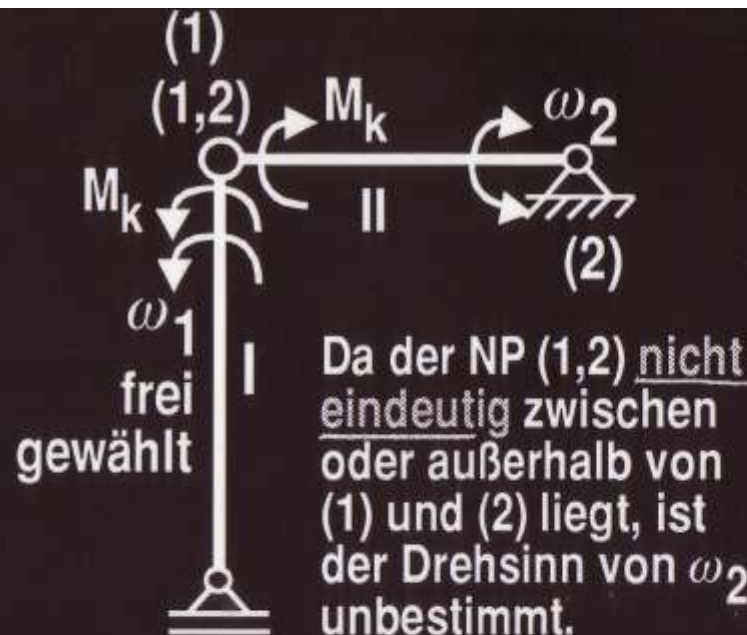
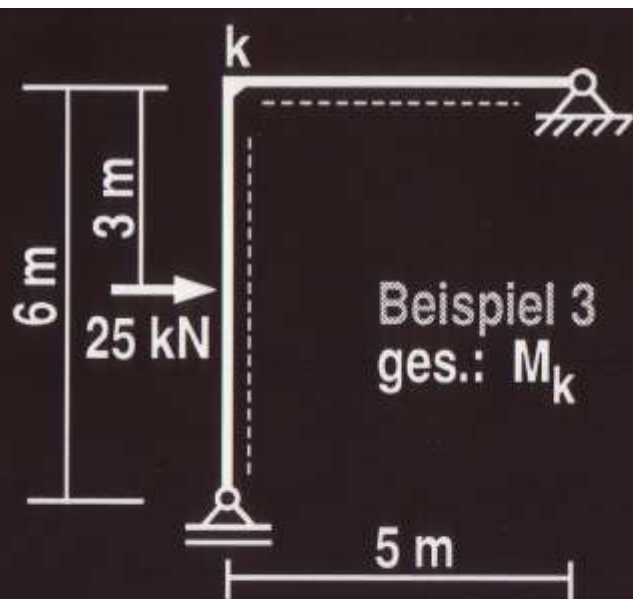
Verträglichkeitsbedingungen

Verträglichkeit im NP (1,2)

$$\begin{aligned}
 v_{k1} &= v_{k2} \\
 \omega_1 \cdot 3 &= \omega_2 \cdot 4 \\
 \omega_2 &= 3 \omega_1 / 4
 \end{aligned}$$

Verträglichkeit im NP (2,3)

$$\begin{aligned}
 v_{c3} &= v_{c2} \\
 \omega_3 \cdot 3 &= \omega_2 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \omega_1 / 4 \\
 \omega_3 &= \omega_1
 \end{aligned}$$



Verträglichkeit im NP (1,2)

$$v_{k2} = v_{k1} \rightarrow \omega_2 \cdot 5 = \omega_1 \cdot r_1 \quad \text{mit } r_1 = 0 = \text{Abstand von (1) bis (1,2)}$$

$$\omega_1 \text{ ist beliebig} \rightarrow \omega_2 = 0$$

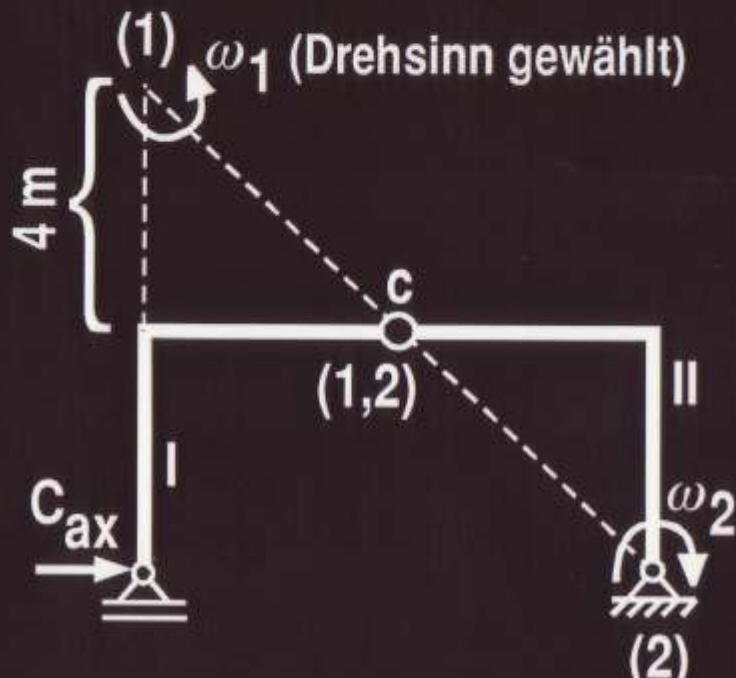
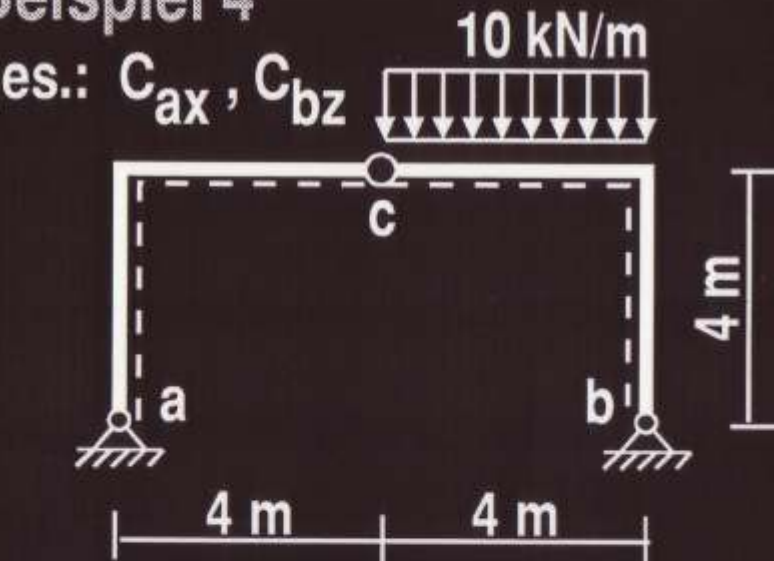
Arbeitsgleichung

$$M_k \cdot \omega_1 + 25 \cdot 3 \cdot \omega_1 \pm M_k \cdot \omega_2 = 0 \rightarrow M_k = -75$$

Nachteil der kinematischen Schnittkraftberechnung:
Für jede Schnittkraft muss eine neue Polfigur ermittelt werden !

Beispiel 4

ges.: C_{ax} , C_{bz}



Berechnung von C_{ax}
Verträglichkeit in (1,2)

$$v_{c1} = v_{c2}$$

$$\omega_1 \cdot 4 = \omega_2 \cdot 4$$

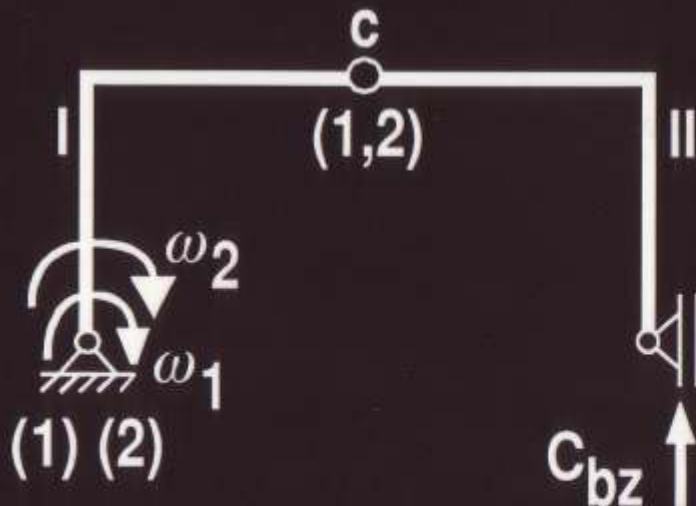
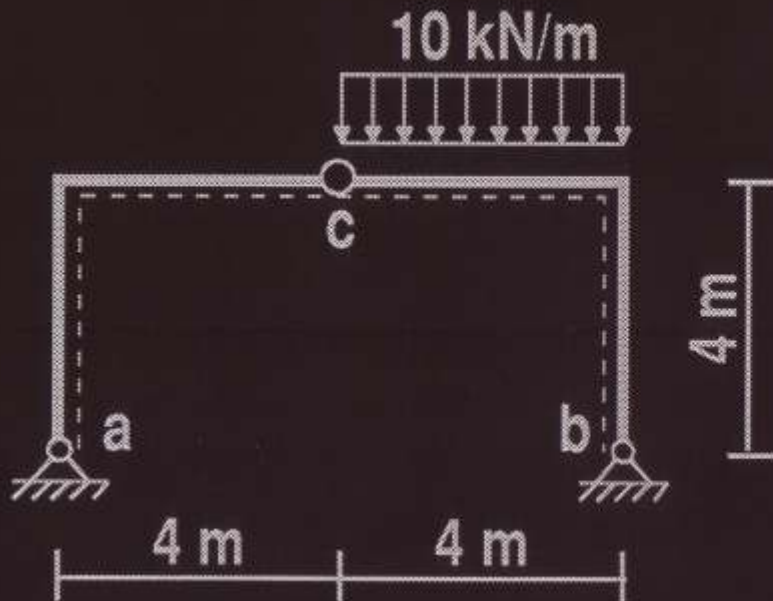
$$\omega_1 = \omega_2$$

Arbeitsgleichung $\overbrace{R}^R$

$$C_{ax} \cdot 8 \cdot \omega_1 - 10 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \omega_2 = 0$$

$$C_{ax} \cdot 8 \cdot \omega_1 - 10 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \omega_1 = 0$$

$$C_{ax} = 80 / 8 = 10$$



Berechnung von C_{bz}

Verträglichkeit in (1,2)

$$v_{c1} = v_{c2}$$

$$\omega_1 \cdot 4 = \omega_2 \cdot 4$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

Arbeitsgleichung

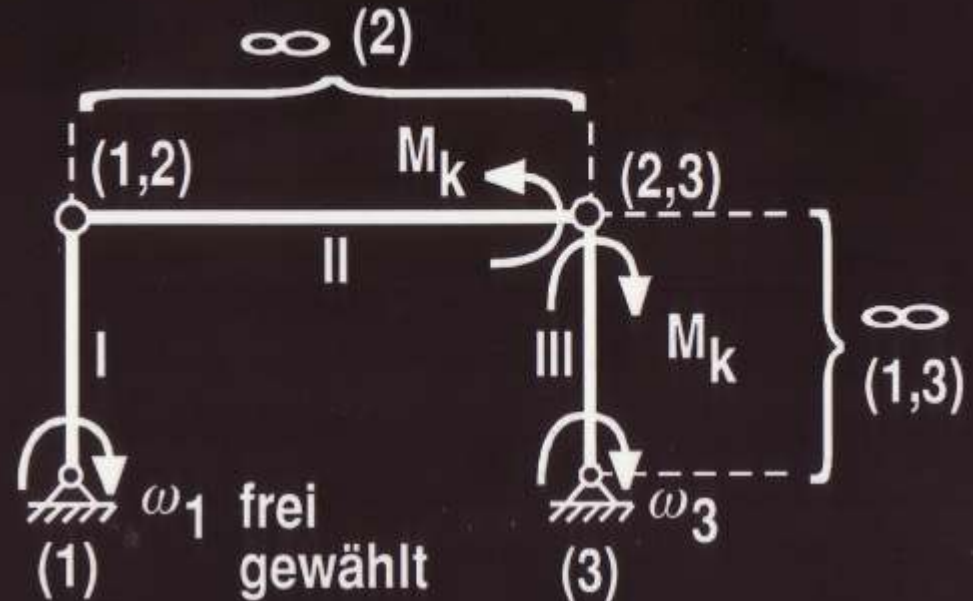
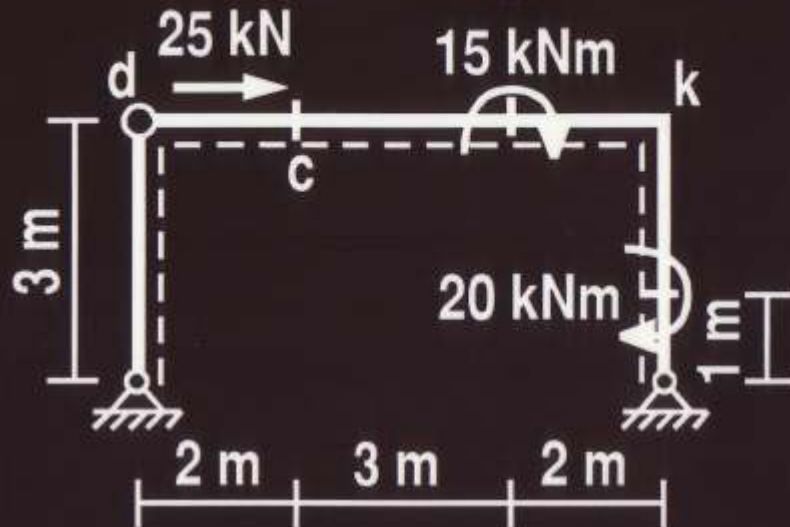
$$-C_{bz} \cdot 8 \cdot \omega_2 + 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \omega_2 = 0$$

$$C_{bz} = 240 / 8 = 30$$

Eine Verträglichkeitsbedingung in diesem Fall nicht erforderlich.

Es ist überhaupt günstig, zuerst die Arbeitsgleichung aufzuschreiben und dann nur die notwendigen Verträglichkeitsbedingungen aufzustellen.

Beispiel 5: ges.: M_k

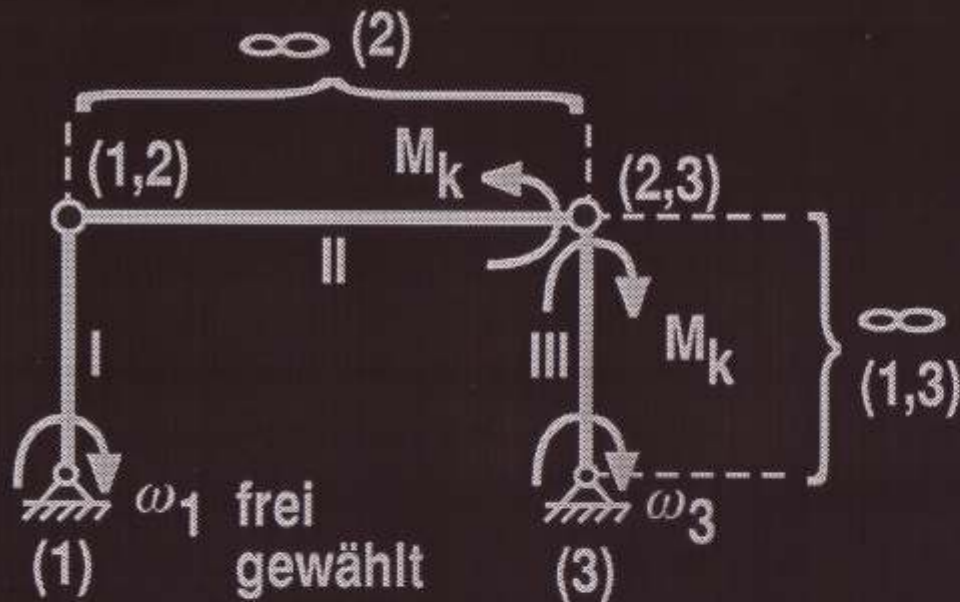


Verträglichkeit in (1,2)

$$\omega_1 \cdot 3 = \omega_2 \cdot r_2 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{3}{r_2} \rightarrow \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \omega_1 \frac{3}{r_2} = 0 \rightarrow \omega_2 = 0$$

Wenn der HP einer Scheibe im Unendlichen liegt, dann ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Scheibe Null: $\omega_2 = 0$

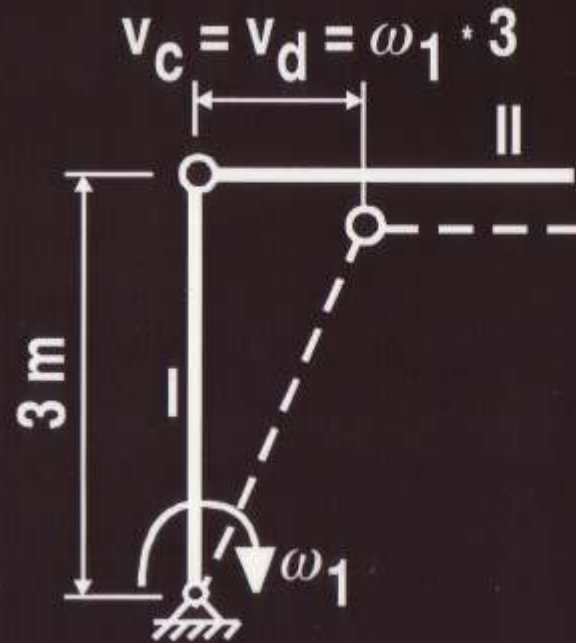
Scheibe II macht keine Verdrehung, sondern nur eine Verschiebung (Translation).



Verträglichkeit in (1,3)

$$\omega_3 \cdot r_3 = \omega_1 \cdot r_1 \rightarrow \omega_3 = \omega_1 \frac{r_1}{r_3} \rightarrow \lim_{\substack{r_1 \rightarrow \infty \\ r_3 \rightarrow \infty}} \omega_1 \frac{r_1}{r_3} = \omega_1 \rightarrow \omega_3 = \omega_1$$

Wenn der NP zweier Scheiben im Unendlichen liegt, dann sind deren Winkelgeschwindigkeiten gleich: $\omega_1 = \omega_3$


$$M_k \cdot \omega_2 + M_k \cdot \omega_3 + 20 \cdot \omega_3 + 15 \cdot \omega_2 + 25 \cdot \omega_1 \cdot 3 = 0$$

BM15

Die Übungen zu diesem Kapitel
"10. Kinematische Beweglichkeit
statischer Systeme"
befinden sich in der "Baustatik"
in den Dateien BS01 und BS02