

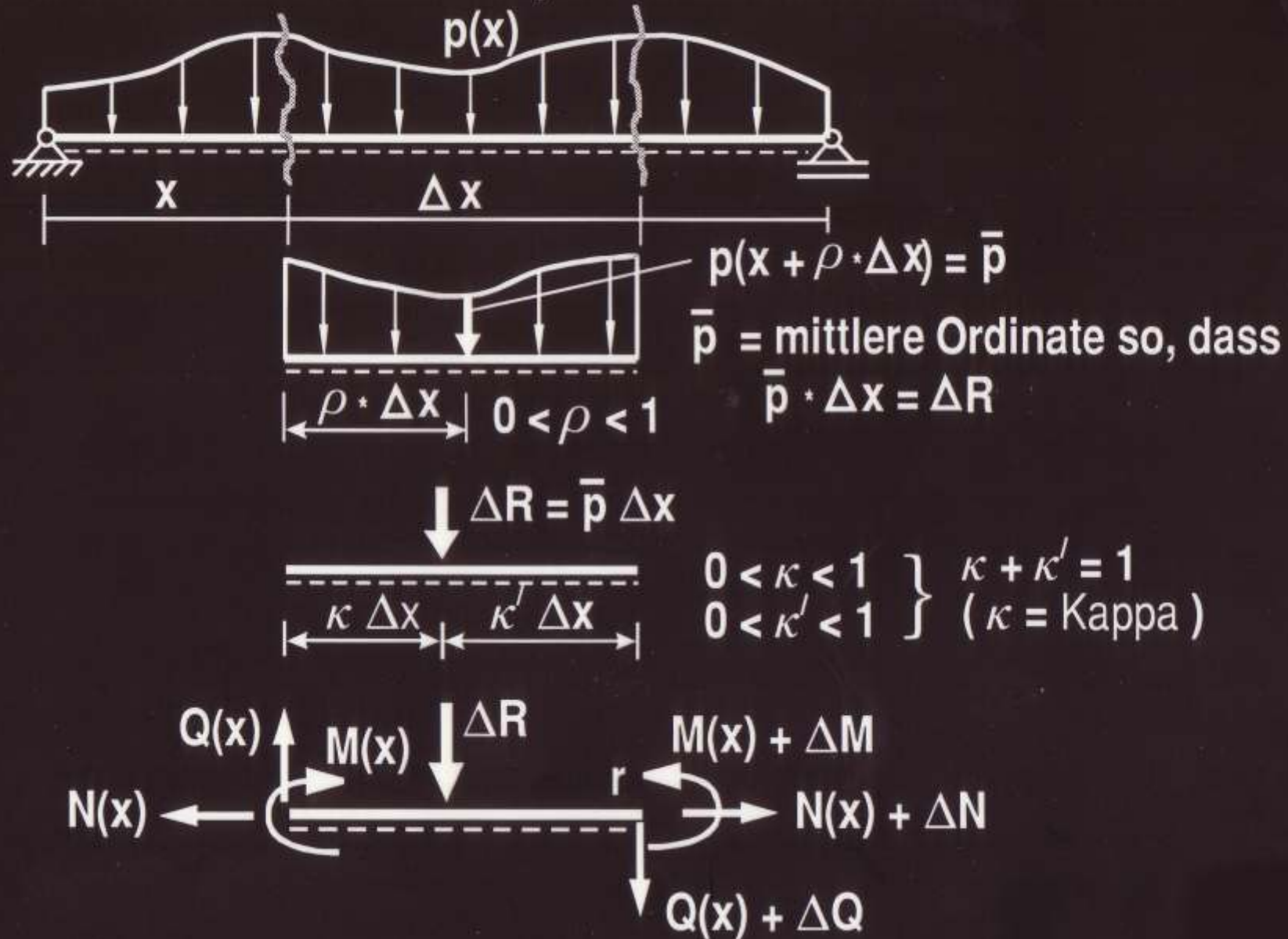


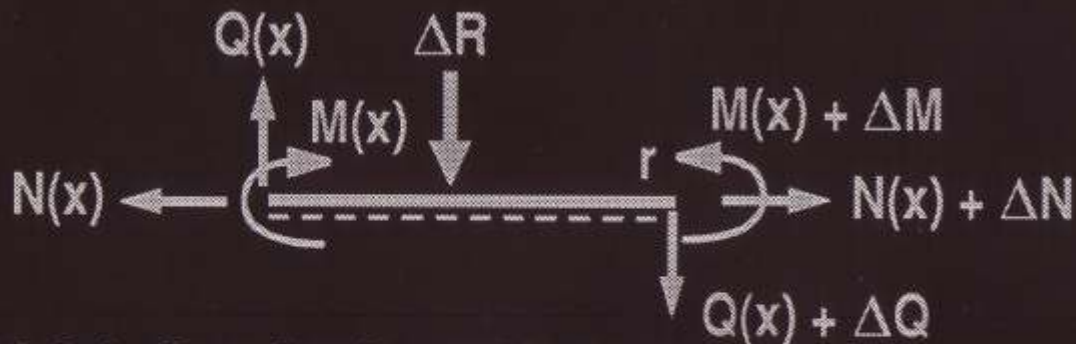
Diethard Thieme
Skripte
zur Baumechanik

Stabtragwerke

BM 08

6.3 Mathematische Beziehungen zwischen den statischen Größen





6.3.1 Querkraft und Belastung

$$\uparrow \Sigma K_z = 0 \rightarrow \cancel{Q(x)} - \Delta R - \cancel{Q(x)} - \Delta Q = 0$$

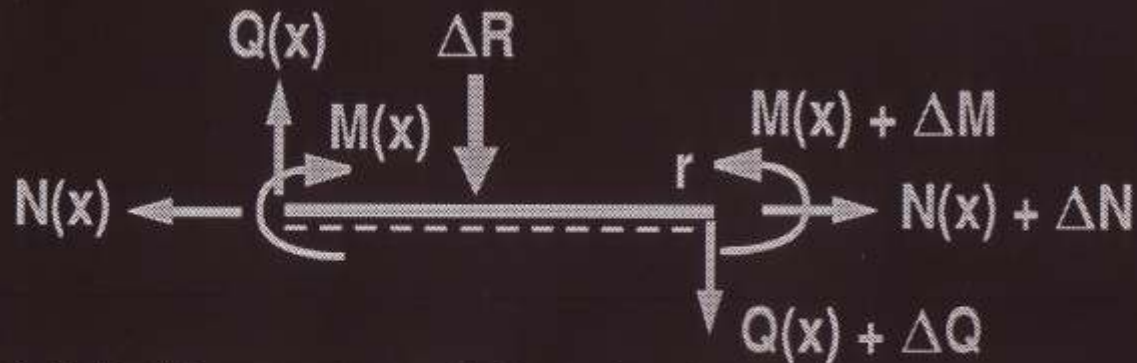
$$\Delta Q = - \Delta R$$

$$\Delta Q = - \bar{p} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = - p(x + \rho \cdot \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \boxed{\frac{dQ}{dx} = - p(x)}$$

Wenn man die Querkraftfunktion ableitet, dann bekommt man die Belastungsfunktion (mit einem Minus).



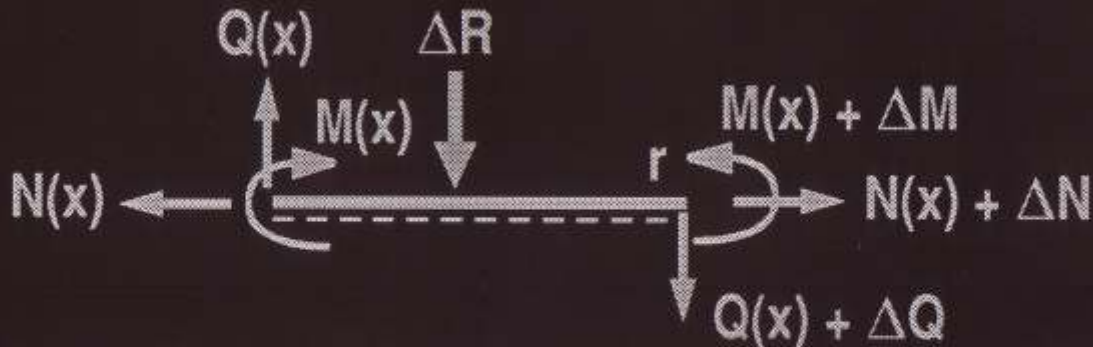
6.3.2 Moment und Querkraft

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_r = 0 \rightarrow \cancel{M(x)} - \cancel{M(x)} - \Delta M + Q(x) \cdot \Delta x - \Delta R \cdot \kappa' \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q(x) - \kappa' \cdot \bar{p} \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \boxed{\frac{dM}{dx} = Q(x)}$$

Wenn man die Momentenfunktion ableitet,
dann bekommt man die Querkraftfunktion.



6.3.3 Moment und Belastung

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \frac{dQ}{dx} = -p(x) \\ \text{b) } \frac{dM}{dx} = Q(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Differenzieren von b)} \\ \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) in a) einsetzen} \\ \boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x)} \end{array}$$

Die 2. Ableitung der Momentenfunktion ergibt die Belastungsfunktion (mit einem Minus).

6.3.4 Extremwert des Biegemomentes

$M(x)$ hat dort einen Extremwert (Maximum oder Minimum),

wo $\frac{dM}{dx} = 0$ (Anstieg Tangente Null) ist $\rightarrow \frac{dM}{dx} = \boxed{Q(x) = 0}$

(vgl. Satz 9, Abschn. 6.2.1)

6.3.5 Bestimmung der Schnittkräfte durch Integration der Belastungsfunktion

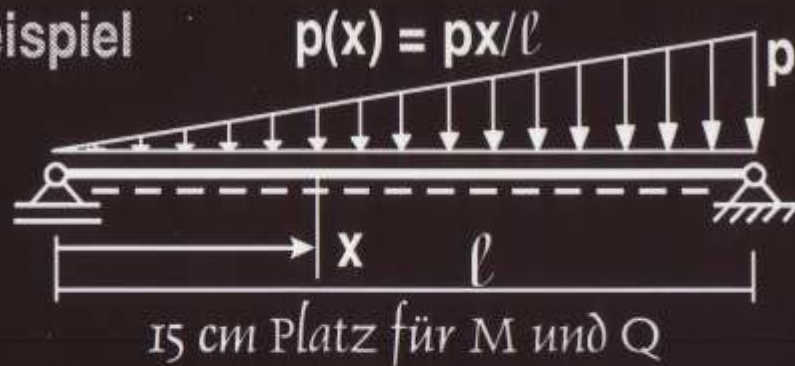
Aus $dQ / dx = - p(x)$ folgt $Q(x) = - \int p(x) dx + C_1$

Aus $dM / dx = Q(x)$ folgt $M(x) = \int Q(x) dx + C_2$

$$M(x) = - \iint p(x) dx dx + C_1 x + C_2$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus Randbedingungen und Übergangsbedingungen bestimmt.

Beispiel



$$Q(x) = -\frac{p}{\ell} \int x \, dx + C_1$$

$$Q(x) = -px^2/2\ell + C_1$$

$$M(x) = \int Q(x) \, dx + C_2$$

$$M(x) = -px^3/6\ell + C_1x + C_2$$

Randbedingungen

1. bei $x = 0$ ist $M = 0 \rightarrow C_2 = 0$

2. bei $x = \ell$ ist $M = 0 \rightarrow 0 = -p\ell^3/6\ell + C_1\ell \rightarrow C_1 = p\ell/6$

Lösungen

$$Q(x) = -px^2/2\ell + p\ell/6 \quad (\text{quadratische Parabel})$$

Querkräfte an den Auflagern (Stützkräfte)

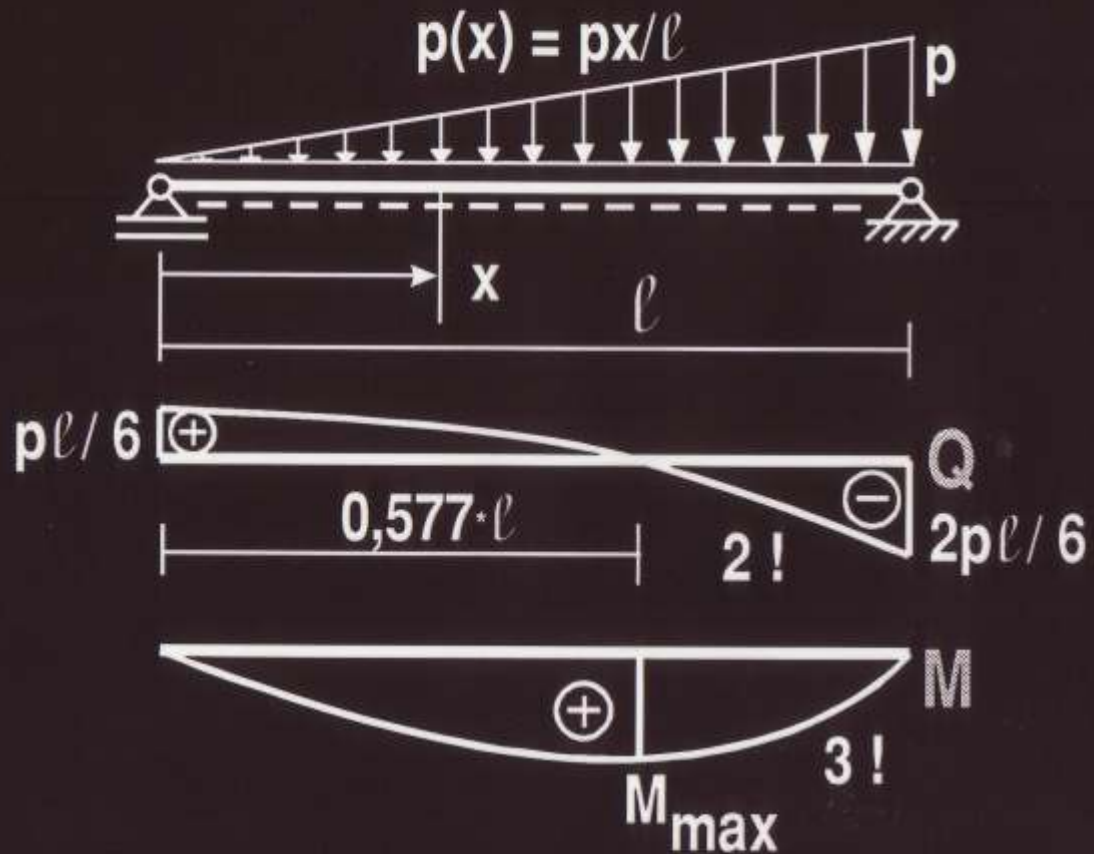
$$Q(x=0) = p\ell/6; \quad Q(x=\ell) = -p\ell^2/2\ell + p\ell/6 = -2p\ell/6$$

Bestimmung von $x_{\max}$ ($x_{\max}$ liegt bei $Q = 0$)

$$\text{Aus } Q = 0 \rightarrow 0 = -px^2/2\ell + p\ell/6 \rightarrow x^2 = \ell^2/3 \rightarrow x_{\max} = 0,577 \cdot \ell$$

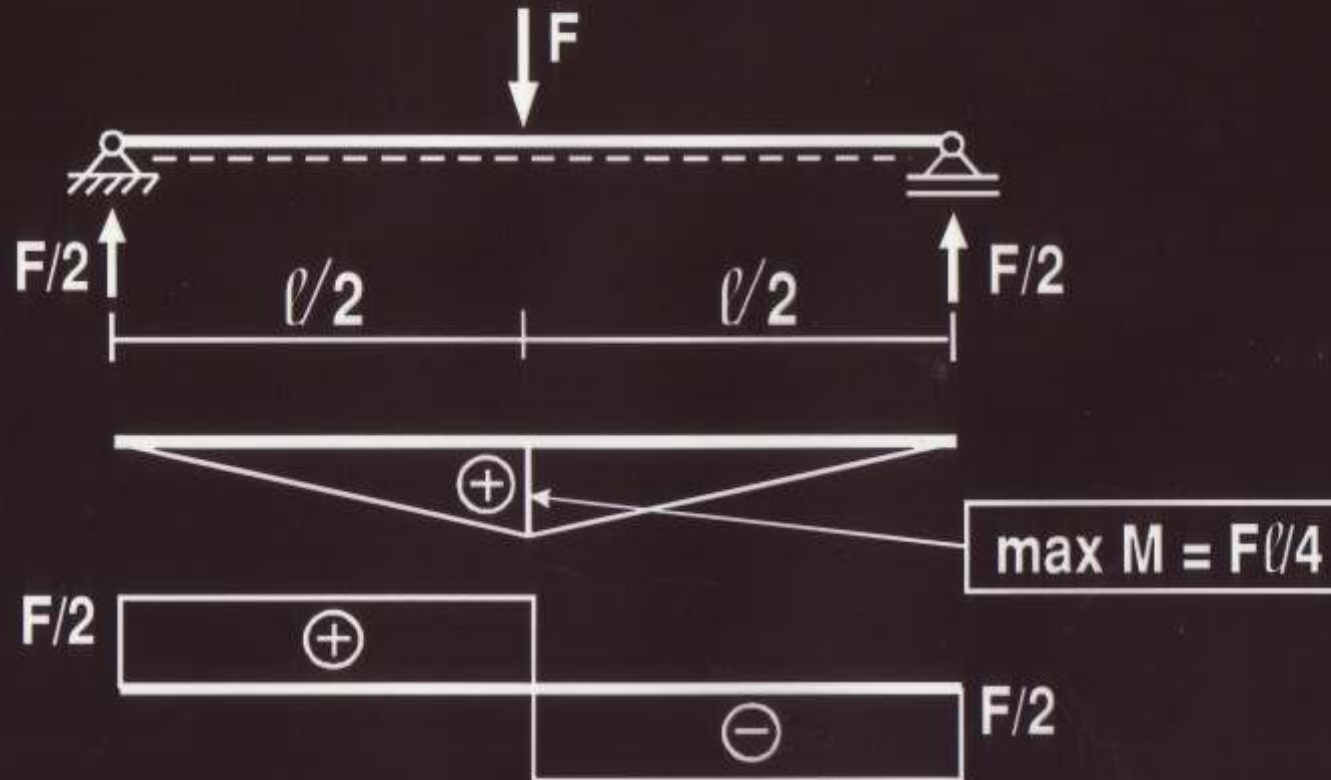
$$M(x) = -px^3/6\ell + p\ell x/6 \quad (\text{kubische Parabel}), \quad M_{\max} = 0,0642p\ell^2$$

Schnittkraftdiagramme

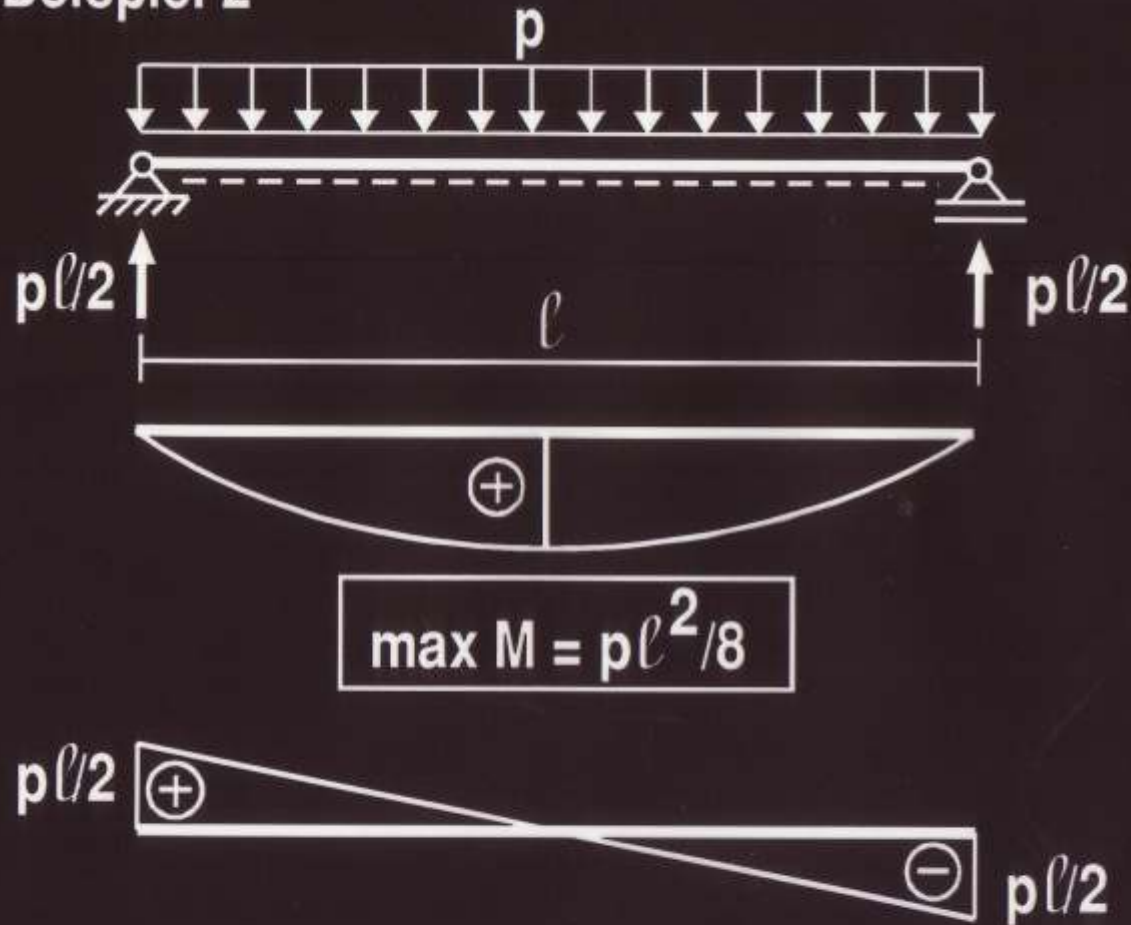


6.4 Wichtige Sonderfälle der Belastung

Beispiel 1



Beispiel 2

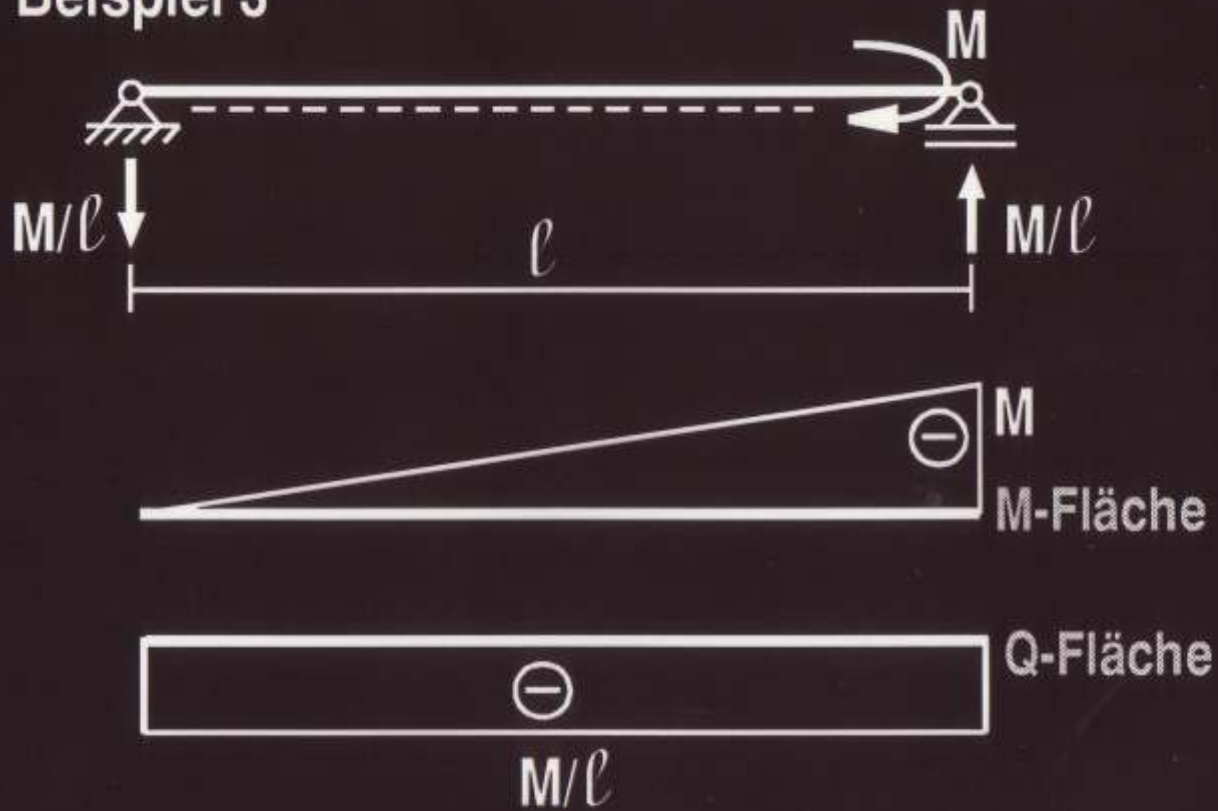


Wie groß ist $\max M$?

$$\max M = \frac{p\ell}{2} \frac{\ell}{2} - \frac{p\ell}{2} \frac{\ell}{4}$$

$$\max M = p\ell^2/8$$

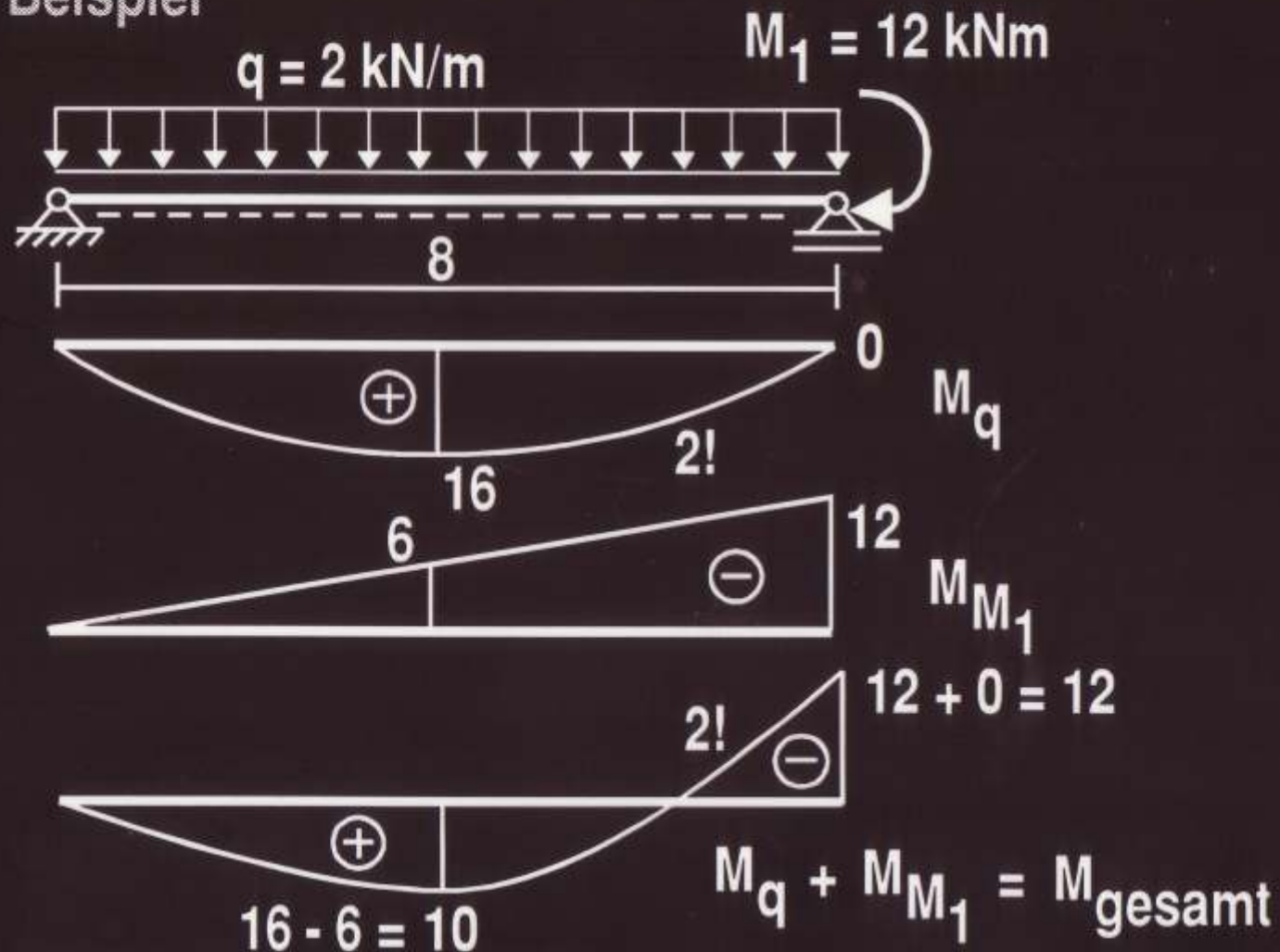
Beispiel 3



6.5 Superpositionsgesetz

Die Stütz- und Schnittkräfte können aus den einzelnen Lastwirkungen getrennt berechnet und zu den Gesamtstütz- und Gesamtschnittkräften zusammengesetzt (superponiert) werden.

Beispiel

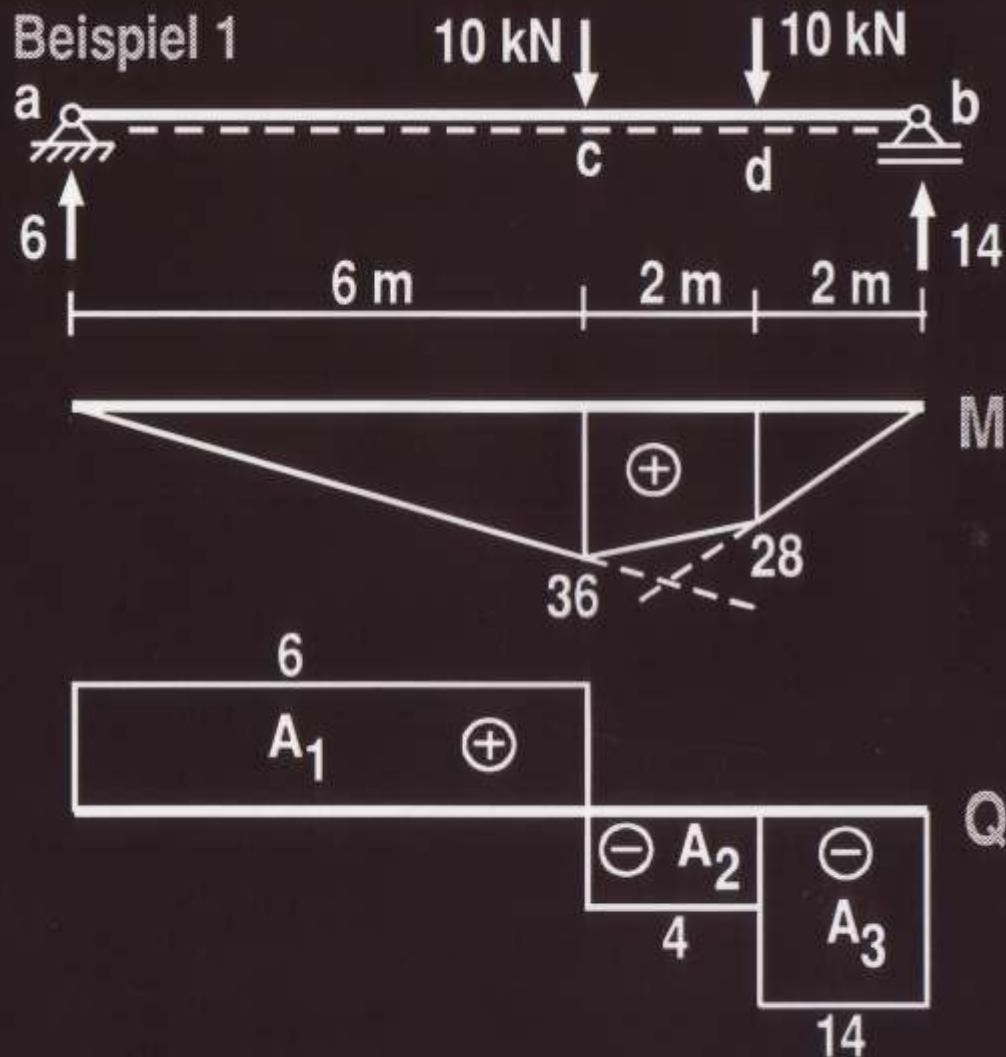


6.6 Ausnutzen der Integralbeziehung zwischen Moment und Querkraft

$$M = \int Q(x) dx + C$$

Das Moment an einer beliebigen Stelle ist der Inhalt der Querkraftfläche bis zu dieser Stelle.

Die Konstante C hat die Bedeutung eines Einzelmomentes.



Von links beginnen !
 Zugfaser an der Unterseite
 des Balkens an der Stelle,
 an der das Moment
 berechnet werden soll !

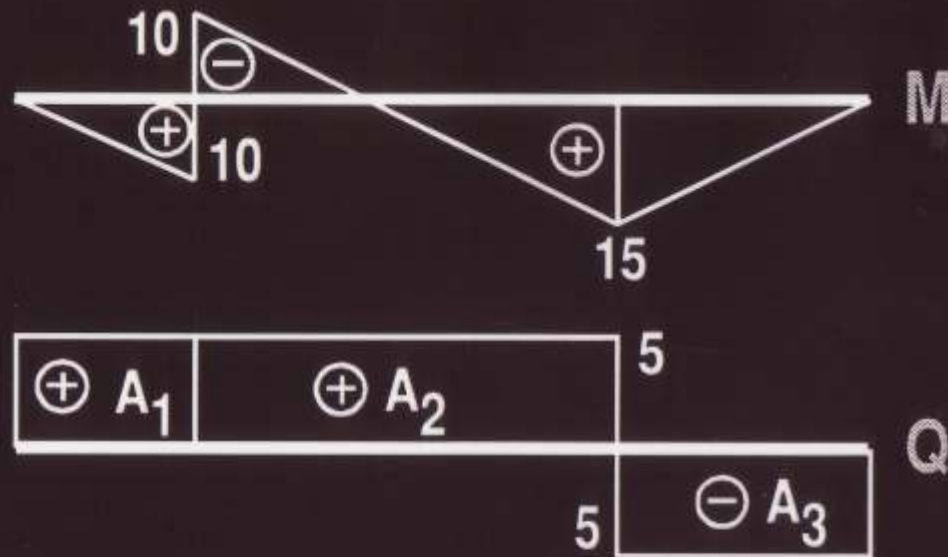
$$M_c = A_1 = 36$$

$$M_d = A_1 + A_2 = 36 - 8 = 28$$

Beispiel 2

Vorsicht bei Einzelmomenten und verteilten Momenten
als äußere Belastungen und Einspannmomenten als
Stützreaktionen.

$$M = \int Q(x) dx + \overset{\text{Einzelmoment}}{\downarrow} C$$



Von links beginnen
(M mit Vorzeichen
berücksichtigen) !

$$M_{c,l} = A_1 = 10$$

$\downarrow$ M mitnehmen

$$M_{c,r} = A_1 - 20 = 10 - 20 = -10$$

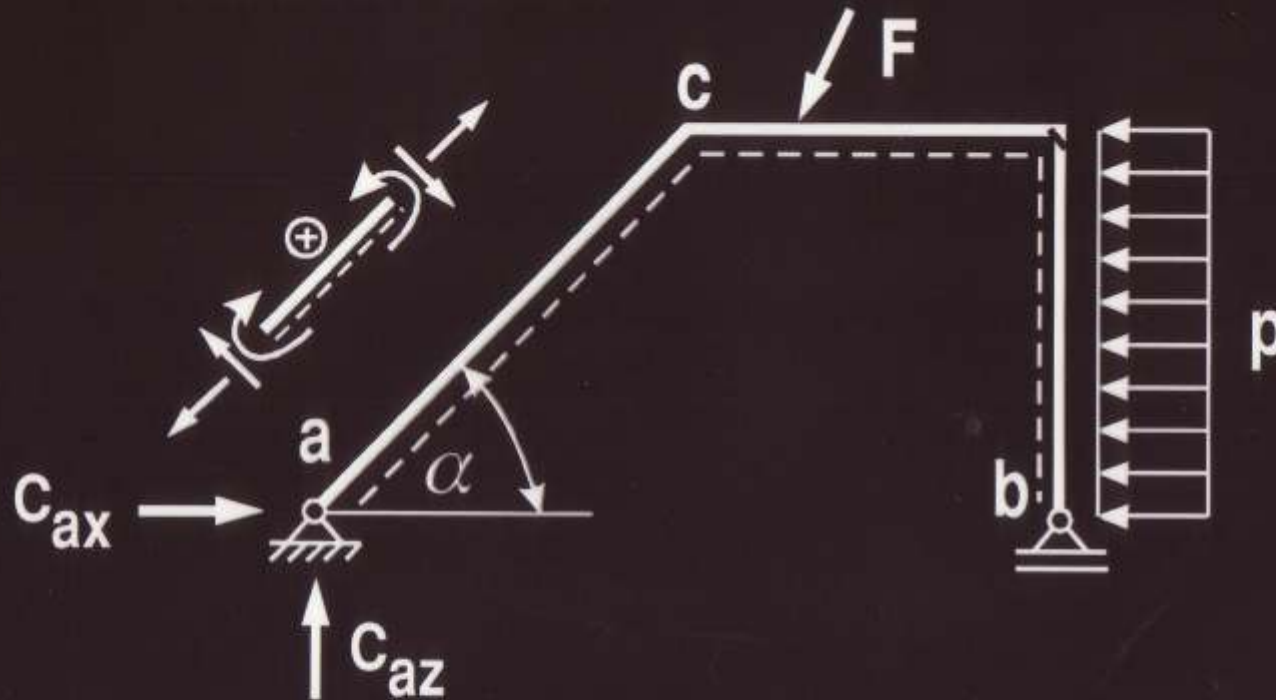
$$M_d = A_1 + A_2 - 20$$

$$M_d = 10 + 25 - 20 = 15$$

$$M_b = A_1 + A_2 - 20 + A_3 = 0$$

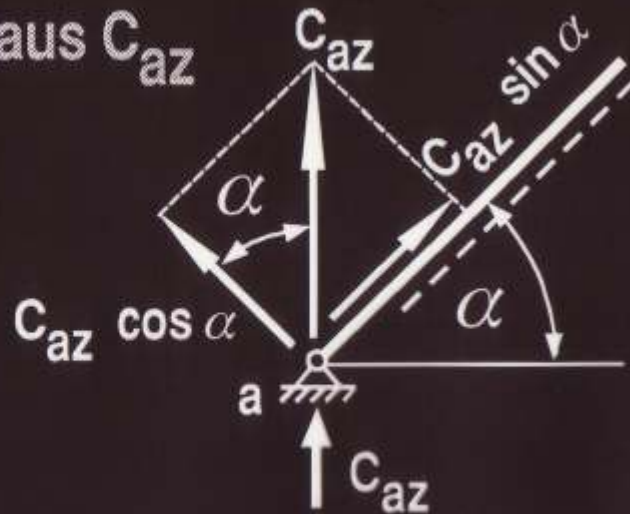
7 Biegesteife Tragwerke verschiedener Form

7.1 Geknickter Balken



Besonderheit : Bei der Berechnung von Q und N am schrägen Stabteil $a-c$ müssen die Stützkkräfte C_{ax} und C_{az} zerlegt werden.

Q und N aus C_{az}

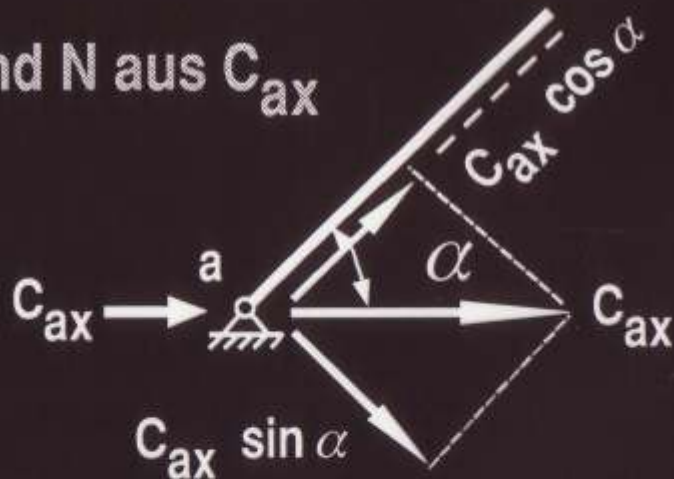


verkürzt:

$$Q_a = C_{az} \cos \alpha$$

$$N_a = - C_{az} \sin \alpha$$

Q und N aus C_{ax}



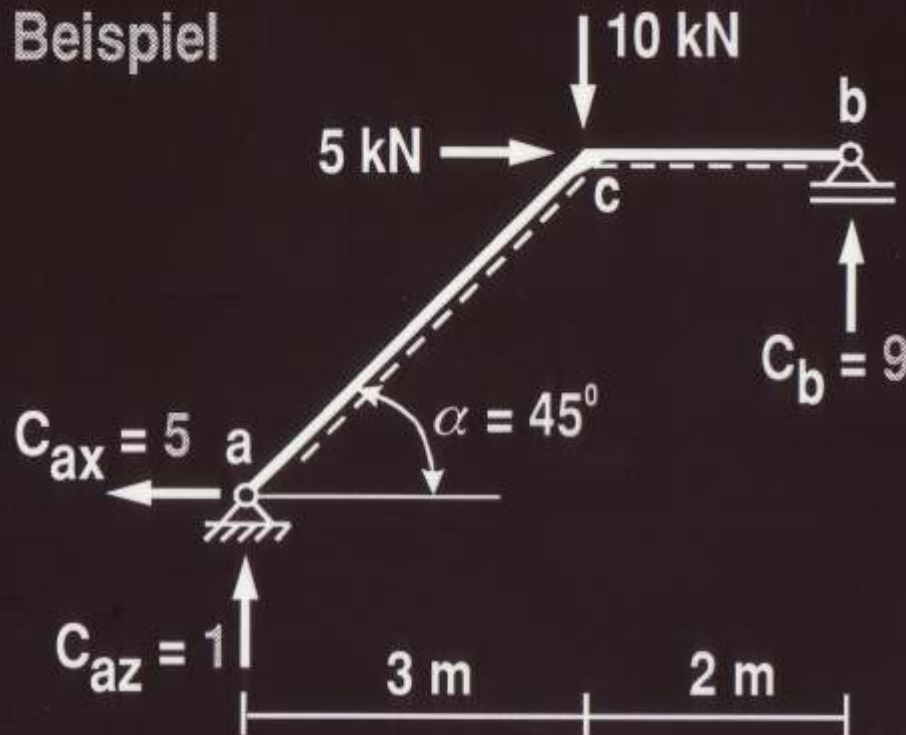
verkürzt:

$$Q_a = - C_{ax} \sin \alpha$$

$$N_a = - C_{ax} \cos \alpha$$

Die Zerlegung der Stützkkräfte nicht in das Tragwerk zeichnen, sondern die Auflager getrennt herauszeichnen.

Beispiel



$$\sum K_x = 0$$

$$C_{ax} - 5 = 0 \rightarrow C_{ax} = 5$$

$$\sum M_a = 0$$

$$C_b \cdot 5 - 10 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0$$

$$C_b = 9$$

$$\uparrow \sum K_z = 0$$

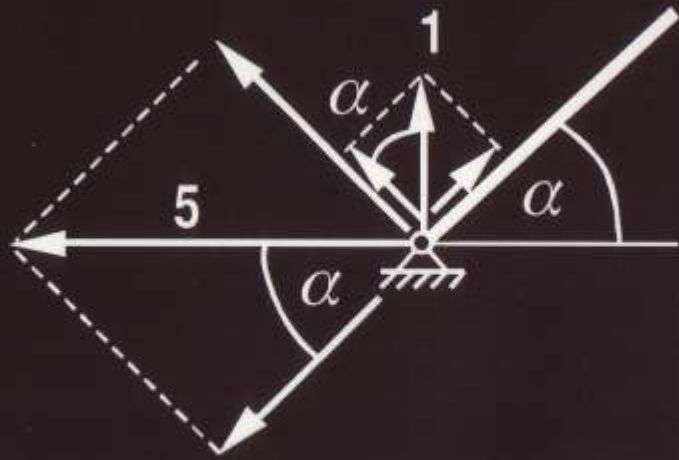
$$C_{az} + 9 - 10 = 0$$

$$C_{az} = 1$$

Momente

von rechts: $M_c = 9 \cdot 2 = 18$

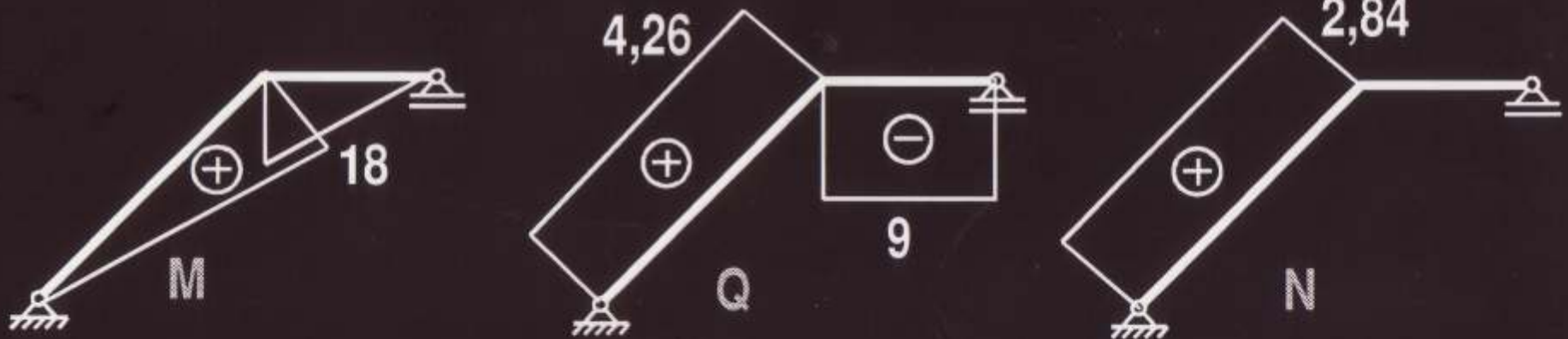
von links: $M_c = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 18$



Q und N im Punkt "a"

$$Q_a = 1 \cdot \cos 45^\circ + 5 \cdot \sin 45^\circ = 4,26$$

$$N_a = -1 \cdot \sin 45^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ = 2,84$$



An einer biegesteifen Ecke ("c") gehen die Momente mit der gleichen Größe auf der gleichen Seite (hier: innen) um die biegesteife Ecke herum, wenn dort nicht ein Einzelmoment als äußere Belastung angreift.